2024 考研数学（三） 真题

试卷及解析

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+nx^{2n}}$，则 $f(x)$

A．在 $x=1$，$x=-1$ 处都连续．

B．在 $x=1$ 处连续，在 $x=-1$ 处不连续．

C．在 $x=1$，$x=-1$ 处都不连续．

D．在 $x=1$ 处不连续，在 $x=-1$ 处连续．

1．【答案】D

【解析】当 $|x|<1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+nx^{2n}}=1+x$,

当 $|x|>1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+nx^{2n}}=0$,

当 $x=1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{1+n}=0$,

当 $x=-1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0}{1+n}=0$,

故 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 故在 $x=-1$ 时，连续；$x=1$ 时不连续．选 D.

2．设 $I=\int_a^{a+k\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$，$k$ 为整数，则 I 的值

A．只与 a 有关

B．只与 k 有关

C．与 a,k 均有关

D．与 a,k 均无关

2.【答案】B

【解析】$I=\int_a^{a+k\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{k\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=k\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2k.$$

选 B.

3. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y=$

A. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x.$

B. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$

C. $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x.$

D. $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$

3.【答案】A

【解析】$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y==\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x.$

选 A.

4. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}na_{2n}=$

A. $-\frac{1}{6}$　　B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{3}$

4.【答案】A

【解析】$\ln(2+x)=\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)+\ln 2=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n}$

$$=\ln 2+\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{4}+\cdots\frac{-\left(\frac{x}{2}\right)^6}{6}+\ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_{2n}=0+a_2+2a_4+3a_6+4a_8+\cdots$$

$$=-\frac{1}{2\cdot 2^2}+2\cdot\left(-\frac{1}{2^4\cdot 4}\right)-3\frac{1}{2^6\cdot 6}+\cdots$$

$$=-\left[\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots\right]$$

$$=-\left[\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2^2}}\right]=-\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}}=-\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}=-\frac{1}{6}.$$

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换下可化成 $y_1^2-2y_2^2+3y_3^2$，则二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式与迹分别为

$A.-6,-2\ B.6,-2\ C.-6,2\ D.6,2$

5.【答案】C

【解析】$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正交变换下化为 $y_1^2-2y_2^2+3y_3^2\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-2,3$

$$\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=1\cdot(-2)\cdot 3=-6,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=1+(-2)+3=2.$$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^2=\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=$

A. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.　　B. $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.　　D. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

6.【答案】 C

【解析】$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$，且$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}_{31}(1)$

故 $\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{P}^2\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{E}_{31}^{\mathrm{T}}(1)\right)^{-1}\boldsymbol{B}\left[\boldsymbol{E}_{31}^{2}(1)\right]^{-1}$

$$= \left[\boldsymbol{E}_{31}^{-1}(1)\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_{31}^{-1}(1)\boldsymbol{E}_{31}^{-1}(1) = \boldsymbol{E}_{31}^{\mathrm{T}}(-1)\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_{31}(-1)\boldsymbol{E}_{31}(-1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a+1 & b & 3 \\ a & \frac{b}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$M_{ij}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的行 j 列元素的余子式，若$|\boldsymbol{A}| = -\frac{1}{2}$.且

$-M_{21}+M_{22}-M_{23}=0$. 则

$A.a=0$或$a=-\frac{3}{2}$

$B. a=0$ 或 $a=\frac{3}{2}$

$C. b=1$ 或 $b=-\frac{1}{2}$

$D. b=-1$ 或 $b=\frac{1}{2}$

7.【答案】B

【解析】$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a+1 & b & 3 \\ a & \frac{b}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \frac{b}{2} & 2 \\ a & \frac{b}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \frac{b}{2}-1 & 0 \\ a & \frac{b}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$=\left(\frac{b}{2}-1\right)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=-1\cdot\left(\frac{b}{2}-1\right)(2a-1)=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{b}{2}-1\right)(2a-1)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow ab-2a-\frac{b}{2}+1=\frac{1}{2}$$

又 $0=-M_{21}+M_{22}-M_{23}=A_{21}+A_{22}+A_{23}$

$$=\begin{vmatrix} a+1 & b & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+1 & b & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+1 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=a+1-b=0,$$

$\Rightarrow b=a+1$ 代入(1)中，得 $a(a+1)-2a-\dfrac{a+1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$

$\Rightarrow a=0$ 或 $a=\dfrac{3}{2}\Rightarrow b=1$ 或 $\dfrac{5}{2}$.

8. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 X 的三阶中心矩 $E(X-EX)^3=$

A. $-\dfrac{1}{32}$　　B.0　　C. $\dfrac{1}{16}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

8.【答案】B

【解析】$EX=\int_0^1 6x^2(1-x)\mathrm{d}x=6\cdot\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)=6\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{2}$

$$E\left(X-\frac{1}{2}\right)^3=\int_0^1 6x(1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\mathrm{d}x\ \underline{\underline{\text{令}x-\frac{1}{2}=t}}\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}6\left(t+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot t^3\mathrm{d}t=0.$$

9. 随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,2),Y\sim N(-1,1)$，设

$$p_1=P\{2X>Y\},p_2=P\{X-2Y>1\}，则$$

A.$p_1>p_2>\dfrac{1}{2}$　　B.$p_2>p_1>\dfrac{1}{2}$

C.$p_1<p_2<\dfrac{1}{2}$　　D.$p_2<p_1<\dfrac{1}{2}$

9.【答案】B

【解析】$E(2X-Y)=2EX-EY=0+1=1$，$D(2X-Y)=4DX+DY=4\times2+1=9$，

所以 $2X-Y\sim N(1,9)$；

$E(X-2Y)=EX-2EY=0+2=2$，$D(X-2Y)=DX+4DY=2+4=6$，

所以 $X-2Y\sim N(2,6)$；

$$p_1 = P\left\{\frac{2X-Y-1}{3} > \frac{0-1}{3}\right\} = 1-\Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$p_2 = P\left\{\frac{X-2Y-2}{\sqrt{6}} > \frac{1-2}{\sqrt{6}}\right\} = 1-\Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

所以 $p_2 > p_1 > \frac{1}{2}$，故选 B.

10. 设随机变量 X,Y 相互独立，且均服从参数为 λ 的指数分布，令 $Z=|X-Y|$,则下列随机变量中与 Z 同分布的是

A. $X+Y$　　　　B. $\frac{X+Y}{2}$

C. $2X$　　　　D. X

10.【答案】D

【解析】X 与 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，则 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{|X-Y|\le z\}$

① 当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

② 当 $z\ge 0$ 时，$F_Z(z)=P\{-z\le X-Y\le z\}=2P\{0\le X-Y\le z\}$

$$=2\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda y}dy\int_y^{y+z}\lambda e^{-\lambda x}dx.$$

$$=2\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda y}\left(e^{-\lambda y}-e^{-\lambda(y+z)}\right)dy$$

$$=2\int_0^{+\infty}\lambda e^{-2\lambda y}dy-2e^{-\lambda z}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-2\lambda y}dy$$

$$=1-e^{-\lambda z}.$$

所以 $Z\sim E(1)$，从而 Z 与 X 服从相同的分布，选 D.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x \frac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos^2 t}dt$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$________.

11.【答案】3

【解析】当 $x \to 0$ 时，

$$\frac{\left(1+x^2\right)\sin x^2}{1+\cos^2 x} \sim \frac{x^2}{2},$$

则 $\int_0^x \frac{\left(1+t^2\right)\sin t^2}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t \sim Ax^3$. 从而 $k=3$.

12. $\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4+3x^2-4}\mathrm{d}x=$__________.

12.【答案】$\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{8}$

【解析】$\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4+3x^2-4}\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty} \frac{5}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+4\right)}\mathrm{d}x$

$$=\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x-\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x$$

$$=\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x-\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_2^{+\infty}-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\left(0-\ln\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{8}.$$

13. 函数 $f(x,y)=2x^3-9x^2-6y^4+12x+24y$ 的极值点是__________.

13.【答案】$(1,1)$

【解析】$\begin{cases} f_x'=6x^2-18x+12=0, \\ f_y'=-24y^3+24=0, \end{cases}$

解得 $(1,1)$，$(2,1)$. $A=f_{xx}''=12x-18$, $B=f_{xy}''=0$, $C=f_{yy}''=-72y^2$,

代入 $(1,1)$ 得 $AC-B^2=432>0, A=-6$,故 $(1,1)$ 是极大值点，$f(1,1)=23$.

代入 $(2,1)$ 得 $AC-B^2=-432<0$，不是极值.

14．某产品的价格函数是 $p=\begin{cases}25-0.25Q, & Q\le 20,\\ 35-0.75Q, & Q>20\end{cases}$（$p$ 为单价，单位：万元；Q 为产量，单位：件），总成本函数为 $C=150+5Q+0.25Q^2$（万元），则经营该产品可获得的最大利润为__________（万元）.

14.【答案】50

【解析】$L=PQ-C=\begin{cases}(25-0.25Q)Q-\left(150+5Q+0.25Q^2\right), Q\le 20,\\ \left(35-0.75Q\right)Q-\left(150+5Q+0.25Q^2\right), Q>20.\end{cases}$

整理得：$L=\begin{cases}-0.5(Q-20)^2+50, Q\le 20,\\ -(Q-15)^2+75, Q>20.\end{cases}$

所以 $Q=20$ 时，$L=50$ 为最大利润.

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为的 $\boldsymbol{A}$ 伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，若

$r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1, r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=2$，则 $\left|\boldsymbol{A}^*\right|=$__________.

15.【答案】16

【解析】$r\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)=1<3$，$r\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right)=2<3\Rightarrow \boldsymbol{A}$ 有特征值 $2,-1$.

又 $3-r\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)=2\Rightarrow\lambda=2$ 有 2 个线性无关的特征向量 $\Rightarrow\lambda=2$ 至少有两重根.

$3-r\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right)=1\Rightarrow\lambda=-1$ 有 1 个线性无关特征向量 $\Rightarrow\lambda=-1$ 至少有一重根.

又 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶 $\Rightarrow \boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,2,-1$，故

$$\left|\boldsymbol{A}\right|=2\cdot 2\cdot\left(-1\right)=-4,\left|\boldsymbol{A}^*\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1}=\left|\boldsymbol{A}\right|^2=16.$$

16. 设随机试验每次成功的概率为 p，现进行 3 次独立重复试验，在至少成功 1 次的条件下，3 次试验全部成功的概率为 $\frac{4}{13}$，则 $p=$________.

16.【答案】 $p=\dfrac{2}{3}$

【解析】A：全成功，B：至少成功一次.

$$P\left(A\middle|B\right)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{p^3}{1-(1-p)^3}=\frac{4}{13},$$

$$13p^3=4-4(1-p)^3$$

整理得 $p(3p-2)(3p+6)=0\Rightarrow p=\dfrac{2}{3}$.

三、 解答题：17~22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 设平面有界区域 D 位于第一象限由曲线 $xy=\dfrac{1}{3},xy=3$ 与直线 $y=\dfrac{1}{3}x,y=3x$ 围成，计算 $\iint\limits_D(1+x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

17.【解】法一：令 $u=xy$，$v=\dfrac{y}{x}$，

（1）$\begin{cases}x=\sqrt{\dfrac{u}{v}}\\ y=\sqrt{uv}\end{cases}$

（2）$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2v}$

故原式 $=\int_{\frac{1}{3}}^{3}\mathrm{d}u\int_{\frac{1}{3}}^{3}\left(1+\sqrt{\dfrac{u}{v}}-\sqrt{uv}\right)\dfrac{1}{2v}\cdot\mathrm{d}v=\dfrac{8}{3}\ln 3$.

法二：利用轮换对称可知，

$$\iint\limits_D(1+x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(1+y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D[(1+y-x)+(1+x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

原式$=\iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\arctan\frac{1}{3}}^{\arctan 3}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{\frac{1}{3\cos\theta\sin\theta}}}^{\sqrt{\frac{3}{\sin\theta\cos\theta}}} r\mathrm{d}r=\int_{\arctan\frac{1}{3}}^{\arctan 3}\frac{4}{3}\csc 2\theta \mathrm{d}2\theta=\frac{4}{3}\ln\tan\frac{x}{2}\Big|_{2\arctan\frac{1}{3}}^{2\arctan 3}=\frac{8}{3}\ln 3$.

18．设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z+\mathrm{e}^{x}-y\ln(1+z^{2})=0$ 确定，求 $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\Big|_{(0,0)}$.

18.【解】将 $y=0$ 代入得 $z=-\mathrm{e}^{x}$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\mathrm{e}^{x}$，代 $x=0\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}=-1$.

将 $x=0$ 代入得 $z+1=y\ln\left(1+z^{2}\right)$，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\ln\left(1+z^{2}\right)+\frac{2yz}{1+z^{2}}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$.

代 $x=0,y=0,z=-1$ 得 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=\ln 2$.

又

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2z}{1+z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{2z}{1+z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+2y\cdot\left[\frac{\partial\left(\frac{z}{1+z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}\right],$$

代 $x=0,y=0,z=-1,\frac{\partial z}{\partial y}=\ln 2$ 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)}=-2\ln 2 .$$

故原式为 $-1-2\ln 2$.

19. 设 $t>0$，平面有界区域 D 由曲线 $y=x\mathrm{e}^{-2x}$ 与直线 $x=t$，$x=2t$ 及 x 轴围成，D 的面积为 $S(t)$，求 $S(t)$ 的最大值.

19.【解】$S(t)=\int_{t}^{2t}x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$，则$S'(t)=4t\mathrm{e}^{-4t}-t\mathrm{e}^{-2t}=t\mathrm{e}^{-4t}\left(4-\mathrm{e}^{2t}\right)$,

令 $4e^{-4t}-e^{-2t}=0\Rightarrow t=\ln 2.$

当 $0<t<\ln 2$ 时, $S'(t)>0$; 当 $t>\ln 2$ 时, $S'(t)<0$. 故 $t=\ln 2$ 时，$S(t)$ 取最大值，有

$$S(\ln 2)=\int_{\ln 2}^{\ln 4} xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\left(xe^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_{\ln 2}^{\ln 4}=\frac{1}{16}\ln 2+\frac{3}{64}.$$

20. 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，且 $f'(0)=f'(1),\left|f''(x)\right|\le 1$. 证明：

（1）当 $x\in(0,1)$ 时，$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right|\le\dfrac{x(1-x)}{2}$;

（2）$\left|\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\le\dfrac{1}{12}$.

20. 证明：（1）

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2 \text{①}$$

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2 \text{②}$$

①$\cdot(1-x)+$②$\cdot x$

$$\Rightarrow f(x)=f(0)(1-x)+f(1)x+f'(0)x(1-x)+f'(1)(x-1)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2x$$

,

$$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right|\leqslant\frac{1}{2}x^2(1-x)+\frac{1}{2}x(1-x)\ =\frac{1}{2}x(1-x)(x+1-x)=\frac{1}{2}x(1-x).$$

（2）$\left|\displaystyle\int_0^1[f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x]dx\right|=\left|\int_0^1 f(x)dx-f(0)\cdot\frac{(1-x)^2}{2}\Bigg|_1^0-f(1)\cdot\frac{1}{2}\right|$

$$=\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leqslant\int_0^1\frac{x(1-x)}{2}dx=\frac{1}{12}.$$

21. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\1&1&0&3\\2&1&2&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\1&-1&a&a-1\\2&-3&2&-2\end{pmatrix}$, 向量 $\alpha=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

（1）证明：方程组 $Ax=\alpha$ 的解均为方程组 $Bx=\beta$ 的解；

（2）若方程组 $Ax=\alpha$ 与方程组 $Bx=\beta$ 不同解，求 a 的值.

21. 证明：（1）

$$Ax=\alpha\Rightarrow(A,\alpha)\begin{pmatrix}x\\-1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$$Bx=\beta\Rightarrow(B,\beta)\begin{pmatrix}x\\-1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

又

$$\begin{pmatrix}A&\alpha\\B&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&0\\1&1&0&3&2\\2&1&2&6&3\\1&0&1&2&1\\1&-1&a&a-1&0\\2&-3&2&-2&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&0\\0&2&0&4&2\\0&3&2&8&3\\0&1&1&3&1\\0&0&a&a&0\\0&-1&2&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&0\\0&1&0&2&1\\0&0&2&2&0\\0&0&1&1&0\\0&0&a&a&0\\0&0&2&2&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&0\\0&1&0&2&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$，故

$r(A,\alpha)=r\begin{pmatrix}A&\alpha\\B&\beta\end{pmatrix}=3$.

即 $(A,\alpha)\begin{pmatrix}x\\-1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 的解是 $(B,\beta)\begin{pmatrix}x\\-1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 的解.

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$ 的解是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$ 与方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 不同解，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 不等价

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$ 的解是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解，故 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解不是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$ 的解.

即 $r(\boldsymbol{B},\boldsymbol{\beta})\neq r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}=3$，故

$$\boldsymbol{B},\boldsymbol{\beta}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & a & a-1 & 0\\ 2 & -3 & 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & a-1 & a-3 & -1\\ 0 & -3 & 0 & -6 & -3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1-a & 3-a & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1-a & 1-a & 0\end{pmatrix}$$

故 $1-a=0$ 即 $a=1$.

22. X 服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，$\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，记为 $X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},T_c=cX_{(n)}$.

（1）求 c 使得 $E(T_c)=\theta$;

（2）记 $h(c)=E(T_c-\theta)^2$,求 c 使得 $f(c)$ 最小.

22.【解】（1） $E\left[cX_{(n)}\right]=cEX_{(n)}=cE\max\{X_1,X_2\cdots X_n\}=\theta$

$$f_X(x)\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & 0<x<\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\leqslant x<\theta\\ 1, & x\geqslant\theta\end{cases}$$

$$\max\{X_1,X_2\cdots X_n\}\sim F_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^n}{\theta^n}, & 0\leqslant x<\theta\\ 1, & x\geqslant\theta\end{cases}$$

$$f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta^n}\cdot x^{n-1} & 0<x<\theta\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$$

$$E\max\{X_1,\cdots,X_n\}=\int_0^\theta \frac{nx}{\theta^n}x^{n-1}\mathrm{d}\,\theta=\frac{1}{\theta^n}\cdot\frac{n}{n+1}x^{n+1}\Big|_\theta^\theta=\frac{n}{n+1}\theta,$$

所以 $c=\dfrac{n+1}{n}$.

（2）$h(c)=E\left(T_c^2+\theta^2-2T_c\theta\right)=ET_c^2+E\theta^2+2\theta ET_c$

$=E\left(cX_{(n)}\right)^2+\theta^2-2\theta E\left(cX_{(n)}\right)=c^2EX_{(n)}^2+\theta^2-2c\theta EX_{(n)}$

因为 $EX_{(n)}^2=\displaystyle\int_0^\theta\frac{nx^2}{\theta^n}\cdot x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta^n}\frac{n}{n+2}x^{n+2}\Big|_0^\theta=\theta^2\cdot\frac{n}{n+2}$

$EX_{(n)}=\displaystyle\int_0^\theta\cdot\frac{nx}{\theta^n}\cdot x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta^n}\cdot\frac{n}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^\theta=\frac{n}{n+1}\theta$

所以 $h(c)=\dfrac{n}{n+2}c^2\theta^2+\theta^2-2c\theta\cdot\dfrac{n}{n+1}\theta=\left(\dfrac{nc^2}{n+2}+1-2c\cdot\dfrac{n}{n+1}\right)\theta^2$

令 $f(x)=\dfrac{n}{n+2}x^2+1-2\dfrac{n}{n+1}x$，$f'(x)=\dfrac{2n}{n+2}x-\dfrac{2n}{n+1}=0$

解得 $x=\dfrac{n+2}{n+1}$，即 $c=\dfrac{n+2}{n+1}$ 时，$h(c)$ 取最小值.