# 2024 考研数学（二） 真题

## 试卷及解析

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1. 函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}$ 的第一类间断点的个数是

A.3.　　B.2.　　C.1.　　D.0.

1.【答案】C

【解析】无定义点为 $x=1$，$x=2$

对于 $x=1,\lim\limits_{x\to1}|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(1-x)(x-2)}\cdot(x-1)}=e$，

故 $x=1$ 是可去间断点.

对于 $x=2,\lim\limits_{x\to2^-}|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}=+\infty$，

故 $x=2$ 是第二类间断点

另外，$x=0$ 是分段点，

$$\lim_{x\to0}|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{(1-x)(x-2)}\cdot\ln|x|}=+\infty,$$

故 $x=0$ 是第二类间断点．因此只有一个第一类间断点

2. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1+t^3,\\ y=e^{t^2}\end{cases}$ 确定，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[f\left(2+\frac{2}{x}\right)-f(2)\right]=$

A.2e.　　B.$\frac{4e}{3}$.　　C.$\frac{2e}{3}$.　　D.$\frac{e}{3}$.

2.【答案】B

【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(2+\dfrac{2}{x}\right)-f(2)}{\dfrac{2}{x}}\cdot 2=2f_{+}^{'}(2)=\left.\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=1}=2\cdot\left.\dfrac{2te^{t^2}}{3t^2}\right|_{t=1}=\dfrac{4\mathrm{e}}{3}$.

3. 设函数 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^3\mathrm{d}t, g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则

A. $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是奇函数.

B. $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数.

C. $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是偶函数.

D. $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数.

3.【答案】D

【解析】$f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^3\mathrm{d}t$，$f'(x)=\sin(\sin x)^3\cos x$ 为奇函数.

所以 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数.

4. 已知数列 $\{a_n\}(a_n\neq 0)$, 若 $\{a_n\}$ 发散，则

A. $\left\{a_n+\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 发散.

B. $\left\{a_n-\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 发散.

C. $\left\{\mathrm{e}^{a_n}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a_n}}\right\}$ 发散.

D. $\left\{\mathrm{e}^{a_n}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a_n}}\right\}$ 发散.

4.【答案】D

【解析】选项 A：取 $a_n=2,\dfrac{1}{2},2,\dfrac{1}{2}\cdots$，$a_n+\dfrac{1}{a_n}$ 收敛到 $2+\dfrac{1}{2}$.错误.

选项 B：取 $a_n=1,-1,1,-1,\cdots$, $a_n-\dfrac{1}{a_n}$ 收敛到0.错误.

选项 C：取 $a_n=\ln 2,-\ln 2,\ln 2,-\ln 2,\cdots$，$e^{a_n}+\dfrac{1}{e^{a_n}}$收敛到$2+\dfrac{1}{2}$.错误.

5.已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0,\end{cases}$ 则在点（0,0）处

A. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$连续，$f(x,y)$可微.

B. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$连续，$f(x,y)$不可微.

C. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$不连续，$f(x,y)$可微.

D. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$不连续，$f(x,y)$不可微.

5.【答案】C

【解析】$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0或y=0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-(0\cdot x+0\cdot y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{0-0-(0\cdot x+0\cdot y)}{\sqrt{x^2+y^2}}0,$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq0且y\neq0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-(0\cdot x+0\cdot y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq0且y\neq0}}\frac{(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

则 $f(x,y)$在（0,0）处可微.

而$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{xy}+(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{xy}\left(-\dfrac{1}{x^2y}\right), xy\neq 0,\\ 0, xy=0,\end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq0且y\neq0}}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq0且y\neq0}}\left[2x\sin\dfrac{1}{xy}-\dfrac{(x^2+y^2)}{x^2y}\cos\dfrac{1}{xy}\right]$不存在，

从而$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$在（0,0）处不连续.

6. 设 $f(x,y)$是连续函数，则$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=$

A. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)dx.$

B. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$

C. $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x.$

D. $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$

6.【答案】A

【解析】$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y==\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x.$

选 A.

7.设非负函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. 给出以下三个命题:

①若 $\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

②若存在 $p>1$, 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)$ 存在，则 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

③若 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则存在 $p>1$, 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)$ 存在.

其中真命题的个数为

A.0. B.1. C.2. D.3.

【答案】 B

【解析】①取 $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$ 收敛，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$发散，错误.

②极限比较判别法原话.正确.

③极限比较判别法为充分不必要条件.错误.

取$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}\mathrm{d}x$收敛，$p>1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=\infty$.

8. 设 $A$ 为 3 阶矩阵，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，若 $P^{\mathrm{T}}AP^2=\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}$，则 $A=$

A. $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$.

B. $\begin{pmatrix}b&0&0\\0&c&0\\0&0&a\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$.

D. $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{pmatrix}$.

8.【答案】 C

【解析】$P^{\mathrm{T}}AP^2=\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}=B$，且$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=E_{31}(1)$，

故 $A=\left(P^{\mathrm{T}}\right)^{-1}B\left(P^2\right)^{-1}=\left(E_{31}^{\mathrm{T}}(1)\right)^{-1}B\left[E_{31}^{2}(1)\right]^{-1}$

$$=\left[E_{31}^{-1}(1)\right]^{\mathrm{T}}BE_{31}^{-1}(1)E_{31}^{-1}(1)=E_{31}^{\mathrm{T}}(-1)BE_{31}(-1)E_{31}(-1)$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}.$$

9. 设 $A$ 为 4 阶矩阵，$A^*$ 为 $A$ 的伴随矩阵，若 $A(A-A^*)=O$ 且 $A\neq A^*$，则 $r(A)$ 取值为

A.0 或 1.　　B.1 或 3.　　C.2 或 3.　　D.1 或 2.

9.【答案】D

【解析】由题意可知 $A(A-A^*)=O$，故 $r(A)+r(A-A^*)\le 4$.

又 $A\ne A^*$,故 $A-A^*\ne O$,即 $r(A-A^*)\ge 1$

因此 $r(A)\le 3$. 又 $A(A-A^*)=A^2-AA^*=A^2-|A|E=A^2=O$

$$\Rightarrow r(A)\le 2,\text{此时} r(A^*)=0\Rightarrow A^*=O$$

又 $A\ne A^*\Rightarrow r(A)\ge 1$，故 $r(A)=1\text{或}2$.

10. 设 $A,B$ 为 2 阶矩阵，且 $AB=BA$, 则“ $A$ 有两个不相等的特征值”是“ $B$ 可对角化”的

A. 充分必要条件.

B. 充分不必要条件.

C. 必要不充分条件.

D. 既不充分也不必要条件.

10.【答案】B

【解析】方法一

充分性， $A$ 有两个不相等的特征值，故 $A$ 必可相似对角化.

又 $AB=BA$,，且 $A$ 有 2 个不同特征值，故 $A$ 的特征向量都是 $B$ 的特征向量.（利用线代 9 讲结论）

又 $A$ 有 2 个线性无关特征向量，故 $B$ 有 2 个线性无关特征向量，故 $B$ 必可相似对角化.

必要性， $B$ 可相似对角化，不妨取 $B=E,A=E$ ，则推翻.

【解析】方法二 因题知 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同特征值，不妨设为 $\lambda_1$，$\lambda_2$ 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使

$$\Rightarrow \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}$$

$$\text{又 } \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA} \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APP}^{-1}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BPP}^{-1}\boldsymbol{AP}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B}$ 可相似对角化 $\Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 可相似对角化.

$$\text{设}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix} \text{ 代入上式}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\lambda_1 b_1 & \lambda_1 b_2\\ \lambda_2 b_3 & \lambda_2 b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 b_1 & \lambda_2 b_2\\ \lambda_1 b_3 & \lambda_2 b_4\end{pmatrix} \text{ 由 } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 b_2=\lambda_2 b_2 \Rightarrow b_2=0$$

$\lambda_2 b_3=\lambda_1 b_3 \Rightarrow b_3=0 \Rightarrow \boldsymbol{B}$ 可对角化 以上推导均基于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，反

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{pmatrix}b_1 & 0\\ 0 & b_4\end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP} \text{ 可对角化}$$

之 $\boldsymbol{B}$ 可对角化无法推出 $\boldsymbol{A}$ 有两不同特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同特征值为 $\boldsymbol{B}$ 可对角化的充分非必要条件.

**二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.**

11.曲线 $y^2=x$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率圆方程为________.

11.【答案】$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

【解析】由图像可转化为 $y=x^2$ 处且

$$k=\frac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}\quad y'=2x\big|_{(0,0)}=0, y''=2\ \ k=2, R=\frac{1}{2},\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-0)^2=\frac{1}{4},$$

即

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}.$$

12.函数 $f(x,y)=2x^3-9x^2-6y^4+12x+24y$ 的极点是_________.

12.【答案】(1, 1)

【解析】由 $\begin{cases} f'_x=6x^2-18x+12=0, \\ f'_y=-24y^3+24=0, \end{cases}$ 解得驻点为 $(1,1),(2,1)$.

又

$$A=f''_{xx}=12x-18, B=f''_{xy}=0, C=f''_{yy}=-72y^2,$$

代入点（1, 1）得 $AC-B^2=432>0, A=-6,$ 故（1, 1）是极大值点.

代入点（2, 1）得 $AC-B^2=-432<0,$ 故（2, 1）不是极值点.

13.微分方程 $y'=\dfrac{1}{(x+y)^2}$ 满足条件 $y(1)=0$ 的解为_________.

13.【答案】 $\arctan(x+y)=y+\dfrac{\pi}{4}$

【解析】方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=(x+y)^2$

$$\text{令 } u=x+y \text{ 则 } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}-1$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=u^2+1$ 则 $\int\dfrac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u=\int\mathrm{d}y$

$$\arctan u=y+c$$

代 $x=1,y=0,u=1$．得 $c=\dfrac{\pi}{4}$

得 $\arctan\left(x+y\right)=y+\dfrac{\pi}{4}$

14.已知函数 $f(x)=x^2(\mathrm{e}^x+1)$，则 $f^{(5)}(1)=$__________.

14.【答案】 31e

【解析】 $\left(\left(\mathrm{e}^x+1\right)x^2\right)^{(5)}=\left(\mathrm{e}^x+1\right)^{(5)}x^2+5\cdot\left(\mathrm{e}^x+1\right)^{(4)}\cdot\left(x^2\right)'+C_5^2\left(\mathrm{e}^x+1\right)^{(5)}\left(x^2\right)''$

$$=\mathrm{e}^x\cdot x^2+5\cdot\mathrm{e}^x\cdot 2x+10\cdot\mathrm{e}^x\cdot 2,$$

则 $f^{(5)}(1)=\mathrm{e}+10\mathrm{e}+20\mathrm{e}=31\mathrm{e}$

15.某物体以速度 $v(t)=t+k\sin\pi t$ 作直线运动.若它从 $t=0$ 到 $t=3$ 的时间段内平均速度是 $\dfrac{5}{2}$，则 $k=$__________.

15.【答案】 $\dfrac{3}{2}\pi$

【解析】 $\dfrac{\int_0^3(t+k\sin\pi t)\mathrm{d}t}{3}=\dfrac{5}{2}$，则 $\int_0^3(t+k\sin\pi t)\mathrm{d}t=\dfrac{15}{2}$，$\dfrac{9}{2}-\dfrac{k}{\pi}\cos\pi t\Big|_0^3=\dfrac{15}{2}$

$\dfrac{9}{2}-\dfrac{k}{\pi}(-1-1)=\dfrac{15}{2}$，则 $k=\dfrac{3}{2}\pi$.

16.设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\b\\a\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\\1\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，且其中任意两个向量均线性无关，则 $ab=$__________.

16.【答案】$-4$

【解析】 由

$$A=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & b & -1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & b+1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & b+1 & a-1 \\ 0 & 0 & 2-a^2-a \end{pmatrix}$$

由 $r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)\le 2$ 且 $r\left(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\right)=2(i\ne j)$

故 $r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=2$

① 当$a=1$时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 相关，不满足题意

② 当$a\ne 1$时，$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & b+1 & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & -b(a+1)-2 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$

故要满足题意，则$a+2=0$且$-b(a+1)-2=0$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases}\Rightarrow ab=-4$$

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 设平面有界区域 $D$ 位于第一象限由曲线 $xy=\dfrac{1}{3},xy=3$ 与直线 $y=\dfrac{1}{3}x,\ y=3x$ 围成，计算 $\iint\limits_D(1+x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ .

17.【解】法一：令$u=xy$，$v=\dfrac{y}{x}$，

（1）$\begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{u}{v}} \\ y=\sqrt{uv} \end{cases}$

（2）$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2v}$

故原式 $=\int_{\frac{1}{3}}^{3}\mathrm{d}u\int_{\frac{1}{3}}^{3}\left(1+\sqrt{\dfrac{u}{v}}-\sqrt{uv}\right)\dfrac{1}{2v}\cdot\mathrm{d}v=\dfrac{8}{3}\ln 3$.

法二：利用轮换对称可知，

$$\iint\limits_{D}(1+x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}(1+y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}[(1+y-x)+(1+x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

原式$=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\arctan\frac{1}{3}}^{\arctan 3}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{\frac{1}{3\cos\theta\sin\theta}}}^{\sqrt{\frac{3}{\sin\theta\cos\theta}}}r\mathrm{d}r=\int_{\arctan\frac{1}{3}}^{\arctan 3}\dfrac{4}{3}\csc 2\theta\mathrm{d}2\theta=\dfrac{4}{3}\ln\tan\dfrac{x}{2}\Big|_{2\arctan\frac{1}{3}}^{2\arctan 3}=\dfrac{8}{3}\ln 3$ .

18. 设 $y(x)$ 为微分方程 $x^2y''+xy'-9y=0$, 满足条件 $y|_{x=1}=2, y'|_{x=1}=6$ 的解.

（1）利用变换 $x=\mathrm{e}^t$ 将上述方程化为常系数线性方程，并求 $y(x)$;

（2）计算 $\int_1^2 y(x)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

解:（1） $x^2y''+xy'-9y=0$, 令 $x=\mathrm{e}^t$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{1}{x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-9y=0$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-9y=0$,

$$y=C_1\mathrm{e}^{3t}+C_2\mathrm{e}^{-3t}, y(x)=C_1x^3+\frac{C_2}{x^3}，y(1)=C_1+C_2=2，①$$

$$y'(x)=3C_1x^2-3\frac{C_2}{x^4}, y'(1)=3C_1-3C_2=6, ②$$

从而 $C_1=2$，$C_2=0$，则 $y(x)=2x^3$.

（2） $\int_1^2 y(x)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2 2x^3\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

$$令\xlongequal{x=2\sin t}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}16\sin^3 t\cdot 4\cos^2 t\mathrm{d}t=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}64(1-\cos^2 t)\cos^2 t\mathrm{d}(\cos t)$$

$$令\xlongequal{\cos t=u}64\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(u^2-u^4)\mathrm{d}u=64\left(\frac{1}{3}u^3\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{5}u^5\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$=64\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{5}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{32}\right)=64\left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{9\sqrt{3}}{160}\right)=8\sqrt{3}-\frac{18\sqrt{3}}{5}=\frac{22\sqrt{3}}{5}.$$

19. 设 $t>0$, 平面有界区域 $D$ 由曲线 $y=\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}$ 与直线 $x=t,x=2t$ 及 $x$ 轴围成，$D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所成旋转体的体积为 $V(t)$，求 $V(t)$ 的最大值.

19.【解】$V(t)=\int_t^{2t}\pi y^2(x)\mathrm{d}x=\int_t^{2t}\pi x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}(2x+1)\mathrm{e}^{-2x}\Big|_t^{2t}$

$$=-\frac{\pi}{4}\left[(4t+1)\mathrm{e}^{-4t}-(2t+1)\mathrm{e}^{-2t}\right](t>0)$$

$V'(t)=-\frac{\pi}{4}\left(-16t\mathrm{e}^{-4t}+4t\mathrm{e}^{-2t}\right)=0,\quad t=\frac{1}{2}\ln 4=\ln 2\quad ,t\in(0,\ln 2),$

$V'(t)>0,t\in(\ln 2,+\infty),V'(t)<0,t=\ln 2,[V(t)]_{\max}=\frac{\pi}{16}\ln 2+\frac{3\pi}{64}$

20. 已知函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，且函数 $g(x,y)=f(2x+y,3x-y)$ 满足 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}-6\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$.

（1）求 $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$;

（2）若 $\frac{\partial f(u,0)}{\partial u}=u\mathrm{e}^{-u},f(0,v)=\frac{1}{50}v^2-1$, 求 $f(u,v)$ 的表达式.

20.【解】（1） $\frac{\partial g}{\partial x}=2\frac{\partial f}{\partial u}+3\frac{\partial f}{\partial v}$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot 2+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot 3\right)+3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot 2+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot 3\right)=4\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+12\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+9\frac{\partial^2 f}{\partial^2 v},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot(-1)\right)+3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(-1)\right)=2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-3\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot(-1)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(-1)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

代回原式得，$25\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=1$，故

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial v}=\frac{1}{25}$$

（2）$\frac{\partial f}{\partial u}=\int\frac{1}{25}\mathrm{d}v=\frac{1}{25}v+c_1(u)$，代 $\frac{\partial f(u,0)}{\partial u}=u\mathrm{e}^{-u}$得 $c_1(u)=u\mathrm{e}^{-u}$，

故 $\frac{\partial f}{\partial u}=u\mathrm{e}^{-u}+\frac{1}{25}v$，则

$$f(u,v)=\int\left(u\mathrm{e}^{-u}+\frac{1}{25}v\right)\mathrm{d}u=-(u+1)\mathrm{e}^{-u}+\frac{1}{25}uv+c_2(v).$$

代 $f(0,v)=\frac{1}{50}v^2-1$ 得 $c_2(v)=\frac{1}{50}v^2$

综上：$f(u,v)=-(u+1)e^{-u}+\frac{1}{25}uv+\frac{1}{50}v^2$.

21. 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，且 $f'(0)=f'(1),\left|f''(x)\right|\le 1$. 证明：

（1）当 $x\in(0,1)$ 时，$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right|\le \dfrac{x(1-x)}{2}$；

（2）$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\dfrac{f(0)+f(1)}{2}\right|\le \dfrac{1}{12}$.

21. 证明：（1）

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2 \text{①}$$

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2 \text{②}$$

$\text{①}\cdot(1-x)+\text{②}\cdot x$

$$\Rightarrow f(x)=f(0)(1-x)+f(1)x+f'(0)x(1-x)+f'(1)(x-1)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2x$$

，

$$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right|\leqslant \frac{1}{2}x^2(1-x)+\frac{1}{2}x(1-x)=\frac{1}{2}x(1-x)(x+1-x)=\frac{1}{2}x(1-x).$$

（2）$\left|\int_0^1[f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x]\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-f(0)\cdot\left.\dfrac{(1-x)^2}{2}\right|_1^0-f(1)\cdot\dfrac{1}{2}\right|$

$$=\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leqslant\int_0^1\frac{x(1-x)}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{12}.$$

22. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&a\\1&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\b&2\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BAx}$．已知方程组

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，但这两个方程组不同解.

（1）求 $a,b$ 的值；

（2）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形.

22.【解】（1）由题意可知，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解

故$r(\boldsymbol{A})=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，且$r(\boldsymbol{A})=2$

$$\text{又}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&a\\1&0&1\\1&1&b\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&a\\0&1&b-1\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&a\\0&0&b-a-1\\0&0&1-a\end{pmatrix}$$

故 $a=1,b=2$

(2) $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}$

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BAx}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

由 $r(\boldsymbol{C})=1\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})=6$

当$\lambda_1=\lambda_2=0$时，得到线性无关的特征向量为$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，单位化为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

当$\lambda_3=6$时，得到线性无关的特征向量为$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，单位化为$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

故令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

则

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\overset{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}{=}6\boldsymbol{y}_3^2$$