2022年全国硕士研究生招生考试

数　学（二）

（科目代码：302）

考试时间：180分钟，试卷总分：150分

考生注意事项

1．答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。

2．选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。

3．填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用2B铅笔填涂。

4．考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生编号															
考生姓名															

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1.当 $x\to 0,\alpha(x),\beta(x)$ 是非零无穷小量，给出以下四个命题.

①若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$,则 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$.

②若 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

③若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$,则 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$.

④若 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

所有真命题的序号：

A.①③　　B.①④　　C.①③④　　D.②③④

【答案】选 C.

【解析】

① $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)}=1$ ，正确；

③ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1-1=0,$ 正确

④ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$ ，即 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，正确；

而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\beta(x)+o(\alpha(x))}{\beta(x)}=1,$ 取 $\alpha(x)=x,\beta(x)=-x,$ 则②错误,故选 C.

2. $\int_0^2 dy\int_y^2\dfrac{y}{\sqrt{1+x^3}}dx=$

A. $\dfrac{\sqrt2}{6}$　　B. $\dfrac13$　　C. $\dfrac{\sqrt2}{3}$　　D. $\dfrac23$

【答案】选 D.

【解析】

$$\text{原式}=\int_0^2 dx\int_0^x \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dy=\int_0^2 \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$$
$$=\int_0^2 \frac{1}{6}\left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(x^3+1\right)$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 2\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

故选 D.

3 .设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 2 阶导数，则

A.当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时，$f'(x_0)>0$

B.当 $f'(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加

C.当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时，$f''(x_0)>0$

D.当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数

【答案】B.

【解析】由于 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 2 阶导数，故 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)>0$，

$x\in \overset{o}{U}(x_0,\delta)\Rightarrow f'(x)>0$，$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加，选择 B

4 .设函数 $f(t)$ 连续，令 $F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt$，则

A. $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

B. $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

C. $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

D. $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

【答案】选 C.

【解析】$F(x,y)=x\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t-y\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x-y}tf(t)\mathrm{d}t$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t+xf(x-y)-yf(x-y)-(x-y)f(x-y)=\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f(x-y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-xf(x-y)-\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t+yf(x-y)+(x-y)f(x-y)=-\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=f(x-y)，\text{故}\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y}，\text{故选 C.}$$

5 .设 p 为常数，若反常积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 收敛，则 p 的取值范围是

A.$(-1,1)$　　B.$(-1,2)$　　C.$(-\infty,1)$　　D.$(-\infty,2)$

【答案】选 A.

【解析】原式为$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}}{\dfrac{1}{x^{p+\varepsilon}}}=\lim_{x\to0^+}x^{\varepsilon}\cdot\ln x(\varepsilon>0)=0$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^{p+\varepsilon}}\mathrm{d}x\text{收敛}\Rightarrow p<1$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\dfrac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}}{\dfrac{-1}{(1-x)^{-p}}}=1\text{与}\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{-1}{(1-x)^{-p}}\mathrm{d}x\text{同收敛}\Rightarrow p>-1,\text{故选 A.}$$

6.已知数列$\{x_n\}, -\frac{\pi}{2} \le x_n \le \frac{\pi}{2}$.则（　）

A.当$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

B.当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

C.当$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不一定存在

D.当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不一定存在

【答案】选 D

【解析】$x_n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} \Rightarrow \{x_n\}$ 发散. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\sin x_n\right) = \cos\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\cos x_n\right) = \sin\frac{\sqrt{2}}{2}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left((-1)^n \cdot \frac{\pi}{4}\right)$不存在，故选 D.

7.已知$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x, I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x, I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$则

A. $I_1 < I_2 < I_3$　　B. $I_2 < I_1 < I_3$　　C. $I_1 < I_3 < I_2$　　D. $I_3 < I_2 < I_1$

【答案】选 A

【解析】$f(x) = \frac{x}{2} - \ln(1+x)$， $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x-1}{2(1+x)} < 0, x \in (0,1)$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \le \ln(1+x), I_1 < I_2.$$

现比较I_2和I_3，即比较$\frac{2\ln(1+x)}{2(1+\cos x)}$与$\frac{2x}{1+\sin x}$

$$\cos\frac{x}{2} > \sin\frac{x}{2}, x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^2 > \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\frac{x}{2} > 1 + \sin x$$

$$2(1+\cos x) > 1 + \sin x$$

即 $\dfrac{1}{2(1+\cos x)} < \dfrac{1}{1+\sin x}$

而 $2\ln(1+x) < 2x \quad x \in (0,1)$

则 $I_2 < I_3$.

故选 A.

8.设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，-1，0 的充分必要条件是

A.存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda Q}$

B.存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$

C.存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$

D.存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}}$

【答案】选 B

【解析】根据相似对角化定义，B 选项可以直接推出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，-1，0，又若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，-1，0，互不相同，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可相似对角化，可推出 B.故选 B.

9.设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{Bmatrix}$，$b = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$，则线性方程组 $\boldsymbol{A}x = b$ 解的情况为

A.无解　　B.有解　　C.有无穷多解或无解　　D.有唯一解或无解

【答案】选 D

【解析】$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & 2 \\ 1 & b & b^2 & 4 \end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{vmatrix}=(b-a)(b-1)(a-1)$$

$|A|\neq 0\Rightarrow r(A)=r(A,b)=3$，有唯一解

$|A|=0\Rightarrow r(A)\neq r(A,b)$ 无解，故选 D.

10 .设 $\alpha_1=\begin{Bmatrix}\lambda\\1\\1\end{Bmatrix},\alpha_2=\begin{Bmatrix}1\\\lambda\\1\end{Bmatrix},\alpha_3=\begin{Bmatrix}1\\1\\\lambda\end{Bmatrix},\alpha_4=\begin{Bmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{Bmatrix}$, 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 等价，则 λ 的取值范围是

A.$\{0,1\}$ B.$\{\lambda|\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq -2\}$ C.$\{\lambda|\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq -1,\lambda\neq -2\}$ D.$\{\lambda|\lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq -1\}$

【答案】选 C

【解析】$\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&\lambda&1&\lambda\\0&1-\lambda&\lambda-1&\lambda^2-\lambda\\0&0&-(\lambda+2)(\lambda-1)&(1+\lambda)(1-\lambda^2)\end{pmatrix}$

$\lambda=1\Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=1$ ，等价

$\lambda=0\ \Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$ ，等价

$\lambda=-1\ \Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3,\ r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=2$ ，不等价

$\lambda=-2\ \Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2,\ r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=3$ ，不等价

其他时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$ ，等价

故 $\{\lambda|\ \lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq -1,\lambda\neq -2\}$，故选 C.

二、填空题（11-16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$________.

【答案】$e^{\frac{1}{2}}$

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}e^{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\frac{\cos x}{\sin x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\left(\frac{1+e^x}{2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x(e^x-1)}{2\sin x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}}=e^{\frac{1}{2}}$$

$$原式=e^{\frac{1}{2}}$$

12. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+xy+y^3=3$ 确定，则 $y''(1)=$ ______.

【答案】 $-\dfrac{31}{32}$

【解析】

$$2x+xy'+y+3y^2\cdot y'=0(①)$$
$$将x=1代入x^2+xy+y^3=3,得y=1$$
$$将x=1,y=1代入,得y'=-\frac{3}{4}$$

对①两边求导：

$$2+y'+xy''+y'+6y\cdot y'\cdot y'+3y^2\cdot y''=0,$$
$$代入y=1,x=1,y'=-\frac{3}{4},$$
$$解得y''(1)=-\frac{31}{32}$$

13 . $\int_0^1\dfrac{2x+3}{x^2-x+1}dx=$ ______.

【答案】 $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\pi$

【解析】

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{2x-1+4}{x^2-x+1}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{d}\left(x^2-x+1\right)+\int_0^1 \frac{4}{x^2-x+1}\mathrm{d}x \\
&= \ln\left(x^2-x+1\right)\Big|_0^1+4\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right) \\
&= 4\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8\sqrt{3}}{9}\pi.
\end{aligned}
$$

14. $y'''-2y''+5y'=0$, 通解 $y(x)=$_______.

【答案】 $C_1+\mathrm{e}^x(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$

【解析】特征方程为 $r^3-2r^2+5r=0$，分解因式，则 $r(r^2-2r+5)=0$，得

$r_1=0, r_{2,3}=1\pm 2i$，则通解为 $y=C_1+\mathrm{e}^x(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$.

15.已知曲线 L 的极坐标方程为 $r=\sin 3\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{3}\right)$，则 L 围成有界区域的面积为_______.

【答案】 $\frac{\pi}{12}$

【解析】

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\sin^2 3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{6}\sin^2 3\theta \mathrm{d}3\theta \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{\pi}\sin^2 u\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\times 2\times\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

16.设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行和第 3 行，再将第 2 列的 -1 倍加到第一列，得到矩阵

$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 A^{-1} 的迹 $\mathrm{tr}\left(A^{-1}\right)=$______.

【答案】-1

【解析】$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; tr\left(A^{-1}\right)=-1.$$

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=2$, 求 $f'(1)$.

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=2$$

由题意，得：

$$\lim_{x\to 0}\left[f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)\right]=0\Rightarrow f(1)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(e^{x^2}\right)-f(1)}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$$

$$-3\lim_{x\to 0}\frac{f\left(1+\sin^2 x\right)-f(1)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$=f'(1)-3f'(1)=2$$

$$\Rightarrow f'(1)=-1$$

18．（本题满分 12 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $2xy'-4y=2\ln x-1$, 满足条件 $y(1)=\frac{1}{4}$ 的解，求曲线 $y=y(x)\left(1\le x\le e\right)$ 的弧长.

【解析】

$$y=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int\frac{2\ln x-1}{2x}e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right]$$

$$=x^2\left[\int\frac{2\ln x-1}{2x^3}dx+C\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\ln x+Cx^2$$

代入 $x=1$，得：$C=\frac{1}{4}$，所以：$y=-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2$.

则：

$$s=\int_1^e\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2x}+\frac{x}{2}\right)^2}dx$$

$$=\int_1^e\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

19．（本题满分 12 分）

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,y-2\le x\le\sqrt{4-y^2},0\le y\le 2\right\}$，计算 $I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy$.

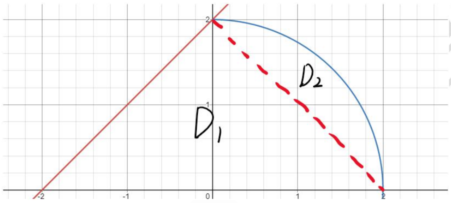
【解析】

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,y-2\le x\le\sqrt{4-y^2},0\le y\le 2\right\}$，计算 $I=\iint\limits_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$I=\iint\limits_D \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_D\left(1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma-\iint\limits_D\frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$$



补线 $x+y=2$（图中虚线），根据对称性

$$=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_2}\frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\pi+2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}^{2}2r\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r$$

$$=\pi+2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4-\frac{4}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\right)\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi+2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin 2\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin 2\theta}{1+\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi+2-2+\pi-2=2\pi-2.$$

20．（本题满分 12 分）

已知可微函数 $f(u,v)$ 满足 $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)\mathrm{e}^{-(u+v)}$, 且 $f(u,0)=u^2\mathrm{e}^{-u}$.

（1）记 $g(x,y)=f(x,y-x)$，求 $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$；

（2）求 $f(u,v)$ 的表达式和极值.

【解析】(1)

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=f_u'-f_v'$$

$$=2(x-y+x)\mathrm{e}^{-y}$$

$$=2(2x-y)\mathrm{e}^{-y}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= \int 2(2x-y)\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x \\
&= 2x^2\mathrm{e}^{-y} - 2xy\mathrm{e}^{-y} + \varphi(y) = f(x, y-x) \\
&= 2x(x-y)\mathrm{e}^{-y} + \varphi(y) = f(x, y-x)
\end{aligned}
$$

$$
f(u,v) = -2uv\mathrm{e}^{-(u+v)} + \varphi(u+v)
$$

代入 $v=0$，得 $\varphi(u) = u^2\mathrm{e}^{-u}$，有：

$$
\begin{aligned}
f(u,v) &= -2uv\mathrm{e}^{-(u+v)} + (u+v)^2\mathrm{e}^{-(u+v)} \\
&= \left(u^2+v^2\right)\mathrm{e}^{-(u+v)}
\end{aligned}
$$

$$
f'_u = 2u\mathrm{e}^{-(u+v)} - \left(u^2+v^2\right)\mathrm{e}^{-(u+v)}
$$

$$
f'_v = 2v\mathrm{e}^{-(u+v)} - \left(u^2+v^2\right)\mathrm{e}^{-(u+v)}
$$

$$
\begin{cases} 2u - u^2 - v^2 = 0 \\ 2v - u^2 - v^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u = v
$$

代回有：$u(u-1)=0$ 得：$u=v=0$ 或 $u=v=1$

$$
\begin{aligned}
A = f''_{uu} &= 2\mathrm{e}^{-(u+v)} - 2u\mathrm{e}^{-(u+v)} - 2u\mathrm{e}^{-(u+v)} + \left(u^2+v^2\right)\mathrm{e}^{-(u+v)} \\
&= \left(2-4u+u^2+v^2\right)\mathrm{e}^{-(u+v)} \\
B &= -2u\mathrm{e}^{-(u+v)} - 2v\mathrm{e}^{-(u+v)} + \left(u^2+v^2\right)\mathrm{e}^{-(u+v)} \\
&= \left(u^2+v^2-2u-2v\right)\mathrm{e}^{-(u+v)} \\
C = f''_{vv} &= \left(2-4v+v^2+u^2\right)\mathrm{e}^{-(u+v)}
\end{aligned}
$$

代入坐标有：

$$
\begin{array}{ll}
A(0,0)=2 & A(1,1)=0 \\
B(0,0)=0 & B(1,1)=-2\mathrm{e}^{-2} \\
C(0,0)=2 & C(1,1)=0
\end{array}
$$

对于 $(0,0)$ 点，有 $AC-B^2=4>0, A>0$，这一点取得极小值 0，

对于 $(1,1)$ 点，有 $AC-B^2<0$，不是极值.

21．（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有 2 阶连续导数，证明：$f''(x)\geq 0$ 的充分必要条件是对不同的实数 a,b，$f(\frac{a+b}{2})\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

【解析】证明：由泰勒公式：

$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$，$\xi$ 介于 x 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2\right]\mathrm{d}x$$
$$=f(\frac{a+b}{2})(b-a)+\int_a^b\left[\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2\right]\mathrm{d}x$$

必要性：若 $f''(x)\geq 0$，则 $f''(\xi)\geq 0$，有 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

充分性：若存在 x_0 使得 $f''(x_0)<0$，因为 $f(x)$ 有二阶连续导数，故存在 $\delta>0$ 使得 $f''(x)$ 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 内恒小于零，记 $a=x_0-\delta,b=x_0+\delta$，此时：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\frac{a+b}{2})(b-a)+\int_a^b\left[\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2\right]\mathrm{d}x<f(\frac{a+b}{2})(b-a)$$

矛盾，故 $f''(x)\geq 0$. 综上，充分性必要性均得证.

22.（本题满分 12 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

(1)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(2)证明 $\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=2$.

【解析】(1)已知：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&1\\0&4&0\\1&0&3\end{bmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-4 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-4)\left(\lambda^2-6\lambda+9-1\right)$$

$$= (\lambda-4)\left(\lambda^2-6\lambda+8\right) = (\lambda-2)(\lambda-4)^2$$

$\lambda = 2$ 时，$2E - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，解得：$\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；

$\lambda = 4$ 时，$4E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，解得：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；

已正交，直接单位化：

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \beta_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

令：

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

得标准型：

$$f = 4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2$$

(2)证明：因为 Q 可逆：

$$\min_{x\neq 0}\frac{f}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=\min_{y\neq 0}\frac{f}{(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}$$

$$=\min_{y\neq 0}\frac{f}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}$$

$$=\min_{y\neq 0}\frac{4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$$

$$\frac{4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\geqslant\frac{2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=2$$

令：

$$\begin{cases} y_1^2=0 \\ y_2^2=0 \\ y_3^2=1 \end{cases}$$

得： $f=2$

故最小值为 2.