2021 考研数学真题及答案

数学（一）

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求，把所选选项前的字母填在答题卡指定位置上.）

(1)函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x},x\neq 0\\ 1,x=0\end{cases}$,在 $x=0$ 处

(A)连续且取极大值. (B)连续且取极小值.

(C)可导且导数为 0. (D)可导且导数不为 0.

【答案】D.

(2)设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$

(A) $dx+dy$. (B) $dx-dy$. (C) dy. (D) $-dy$.

【答案】C.

(3)设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则

(A) $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$. (B) $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$.

(C) $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$. (D) $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$.

【答案】A.

(4) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$. (B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$. (D) $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\cdot\dfrac{2}{n}$.

【答案】B.

【解析】由定积分的定义知，将 $(0,1)$ 分成 n 份，取中间点的函数值，则 $\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$，即选 B.

(5)二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

(A) $2,0$. (B) $1,1$. (C) $2,1$. (D) $1,2$.

【答案】B.

(6)已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，记$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-k\beta_1$，$\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2$，若$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$两两正交，则$l_1$，$l_2$依次为

(A) $\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.　　(B) $-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.　　(D) $-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.

【答案】A.

(7)设A,B为n阶实矩阵，下列不成立的是

(A) $r\begin{pmatrix}A & O\\ O & A^TA\end{pmatrix}=2r(A)$　　(B) $r\begin{pmatrix}A & AB\\ O & A^T\end{pmatrix}=2r(A)$

(C) $r\begin{pmatrix}A & BA\\ O & AA^T\end{pmatrix}=2r(A)$　　(D) $r\begin{pmatrix}A & O\\ BA & A^T\end{pmatrix}=2r(A)$

【答案】C.

(8)设A，B为随机事件，且$0<P(B)<1$，下列命题中不成立的是

(A)若$P(A|B)=P(A)$，则$P(A|\overline{B})=P(A)$.

(B)若$P(A|B)>P(A)$，则$P(\overline{A}|\overline{B})>P(\overline{A})$

(C)若$P(A|B)>P(A|\overline{B})$，则$P(A|B)>P(A)$.

(D)若$P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，则$P(A)>P(B)$.

【答案】D.

(9)设$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$为来自总体$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$的简单随机样本，令$\theta=\mu_1-\mu_2,\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$，则

(A) $\hat{\theta}$是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

(B) $\hat{\theta}$不是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

(C) $\hat{\theta}$是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

(D) $\hat{\theta}$不是θ的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

【答案】C.

(10) 设 $X_1,X_2\dots,X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu,4)$ 的简单随机样本，考虑假设检验问题：$H_0:\mu\le 10, H_1:\mu>10$. $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，若该检验问题的拒绝域为 $W=\left\{\bar{X}\ge 11\right\}$，其中 $\bar{X}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}X_i$，则 $\mu=11.5$ 时，该检验犯第二类错误的概率为

(A) $1-\Phi(0.5)$　　(B) $1-\Phi(1)$

(C) $1-\Phi(1.5)$　　(D) $1-\Phi(2)$

【答案】B.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.请将答案写在答题纸指定位置上.）

(11) $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+2x+2}=$______.

【答案】 $\dfrac{\pi}{4}$

(12)设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2e^t+t+1,x<0 \\ y=4(t-1)e^t+t^2,x\ge 0\end{cases}$ 确定,则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}=$______.

【答案】 $\dfrac{2}{3}$.

(13)欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1,y'(1)=2$ 得解为 $y=$______.

【答案】 x^2.

(14) 设 Σ 为空间区域 $\left\{(x,y,z)\middle|x^2+4y^2\le 4,0\le z\le 2\right\}$ 表面的外侧，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=$______.

【答案】 4π.

(15)设 $A=a_{ij}$ 为 3 阶矩阵，A_{ij} 为代数余子式，若 A 的每行元素之和均为 2，且 $|A|=3$，$A_{11}+A_{21}+A_{31}=$______.

【答案】 $\dfrac{3}{2}$.

(16)甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球. 令 X，Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X 与 Y 的相关系数______.

【答案】 $\dfrac{1}{5}$.

三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(17)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

【答案】$\dfrac{1}{2}$.

(18)(本题满分 12 分)

设 $u_n(x)=e^{-nx}+\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}(n=1,2,\ldots)$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

【答案】$S(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+(1-x)\ln(1-x)+x, x\in(0,1)\\ \dfrac{e}{e-1} \quad ,x=1\end{cases}$.

(19)(本题满分 12 分)

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$，求 C 上的点到 xoy 坐标面距离的最大值.

【答案】66

(20)(本题满分 12 分)

设 $D\subset R^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy$ 取得最大值的积分区域记为 D_1.

(1)求 $I(D_1)$ 的值.

(2)计算 $\int\limits_{\partial D_1}\dfrac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$，其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

【答案】$-\pi$.

(21)(本题满分 12 分)

已知 $A=\begin{pmatrix}a&1&-1\\1&a&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$.

(1)求正交矩阵 P，使得 P^TAP 为对角矩阵；

(2)求正定矩阵 C，使得 $C^2=(a+3)E-A$.

【答案】(1) $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$；(2) $C=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&-1&-1\\-1&\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\\-1&\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\end{pmatrix}$.

(22)(本题满分 12 分)

在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短的一段长度记为 X ,较长的一段长度记为 Y ,令 $Z=\frac{Y}{X}$.

(1)求 X 的概率密度；

(2)求 Z 的概率密度.

(3)求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

【答案】(1) $X \sim f(x)=\begin{cases}1,0<x<1 \\ 0,其他\end{cases}$；(2) $f_Z(z)=(F_Z(z))'=\begin{cases}\frac{2}{(z+1)^2}, z \ge 1 \\ 0,其他\end{cases}$.(3) $-1+2\ln 2$.