2024 考研数学（一） 真题

试卷及解析

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1. 设 $f(x)=\int_0^x e^{\cos t}dt, g(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}dt$，则下列正确的是

A．$f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数

B. $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数

C. $f(x), g(x)$ 均为奇函数

D. $f(x), g(x)$ 均为周期函数

1．【答案】C

【解析】$e^{\cos t}$ 关于 t 是偶函数，则 $\int_0^x e^{\cos t}dt$ 是奇函数，由 $g(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}dt$，则

$g(-x)=\int_0^{\sin(-x)} e^{t^2}dt=\int_0^{-\sin x} e^{t^2}dt$，令 $t=-u$，则 $g(-x)=-\int_0^{\sin x} e^{u^2}du$，

于是 $g(-x)=-g\left(x\right)$，$g(x)$ 是奇函数.

2.已知 $P=P\left(x,y,z\right),Q=Q\left(x,y,z\right)$ 均连续，Σ 为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2},x\le 0,y\ge 0$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=$

A. $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

B. $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

C. $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

D. $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

2．【答案】A

由转换投影公式。

$$\iint_{\Sigma} P\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+Q\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[P\cdot\left(\frac{x}{z}\right)+Q\left(\frac{y}{z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(\frac{Px}{z}+\frac{Qy}{z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

选 A

3.幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}na_{2n}=$

A. $-\frac{1}{6}$　　B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{3}$

3．【答案】A

【解析】$\ln(2+x)=\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)+\ln 2$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n}$$

$$=\ln 2+\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{4}+\cdots\frac{-\left(\frac{x}{2}\right)^6}{6}+\ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_{2n}=0+a_2+2a_4+3a_6+4a_8+\cdots$$

$$=-\frac{1}{2\cdot 2^2}+2\cdot\left(-\frac{1}{2^4\cdot 4}\right)-3\frac{1}{2^6\cdot 6}+\cdots$$

$$=-\left[\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots\right]$$

$$=-\left[\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2^2}}\right]=-\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}}=-\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}=-\frac{1}{6}$$

4.设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上有定义，且 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$，则

A. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=m$，则 $f'(0)=m$.

B. $f'(0)=m$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=m$.

C. $\lim\limits_{x\to0} f'(x)=m$，则 $f'(0)=m$.

D. $f'(0)=m$，则 $\lim\limits_{x\to0} f'(x)=m$.

4．【答案】B

【解析】由 $f'(0)=m$．则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=m\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}[f(x)-f(0)]=0$

从而 $f(0)=0$

于是 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=m$，B 选项正确

5. $\pi_i: a_ix+b_iy+c_iz=d_i\,(i=1,2,3)$, $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)$, $\boldsymbol{\beta}_i=(a_i,b_i,c_i,d_i)$, $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}=m$, $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}=n$,

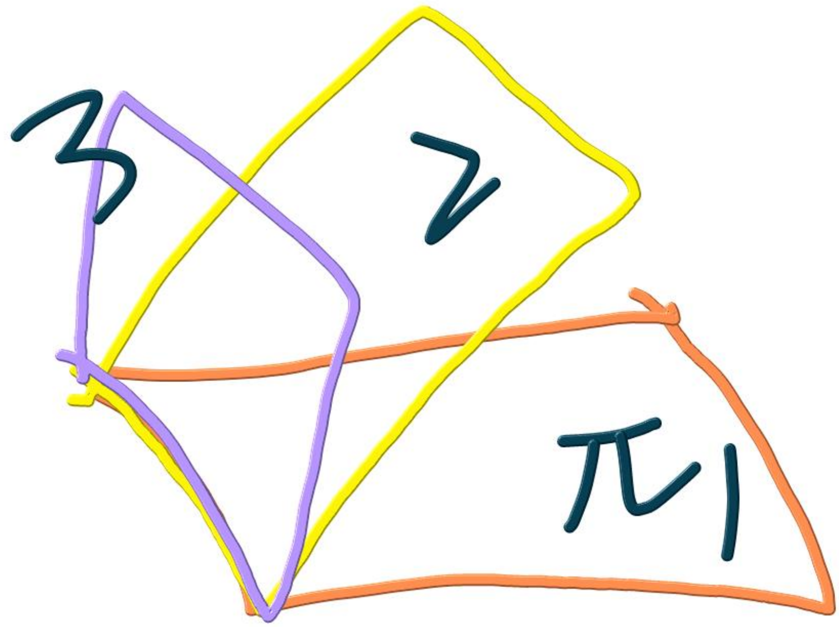
则 $m=$ ____, $n=$ ____.

A. $m=1,n=2$.

B. $m=n=2$.

C. $m=2,n=3$.

D. $m=n=3$.



5．【答案】B

【解析】由题意可知，π_1,π_2,π_3 相交于一条直线，且不重合

即方程组$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$有无穷多解，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两不相关

故$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_3 \end{pmatrix}<3$， $r\left(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\right)=2\left(i\neq j\right)$

故$m=n=2.$

6.设向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\b\\a\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\\1\end{pmatrix}$,若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，且其中任意两个向量均线性无关，则

A. $a=1,b\neq 1$　　　　B. $a=1,b=-1$

C. $a\neq -2,b=2$　　　　D. $a=-2,b=2$

6.【答案】 D.

【解析】 由

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&1&a\\-1&b&-1\\1&a&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1-a&1-a^2\\0&b+1&a-1\\0&a-1&1-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1-a&1-a^2\\0&b+1&a-1\\0&0&2-a^2-a\end{pmatrix}$$

由 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\leq 2$ 且 $r(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=2(i\neq j)$

故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$

① 当$a=1$时，$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_3$相关，不满足题意

② 当$a\neq 1$时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\to\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1&1+a\\0&b+1&a-1\\0&0&a+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1&1+a\\0&0&-b(a+1)-2\\0&0&a+2\end{pmatrix}$

故要满足题意，则$a+2=0$且$-b(a+1)-2=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}$$

7.设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 2 的 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是满足 $\boldsymbol{A\alpha}=\mathbf{0}$ 的非零向量，若对满足 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$ 的 3 维列向量 $\boldsymbol{\beta}$ ，均有 $\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{\beta}$，则

A. $\boldsymbol{A}^3$ 的迹为 2　　　　B. $\boldsymbol{A}^3$ 的迹为 5

C. $\boldsymbol{A}^2$ 的迹为 8　　　　D. $\boldsymbol{A}^2$ 的迹为 9

【答案】A

【解析】由 $\boldsymbol{A\alpha}=0$ 且 $r(\boldsymbol{A})=2$ 可知 $\lambda=0$ 为特征值（且为单根），$\boldsymbol{\alpha}$ 为特征向量

由于 $\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{\beta}=1\cdot\boldsymbol{\beta}$ 且 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 正交

所以 $\boldsymbol{\beta}$ 为特征值 $\lambda=1$ 对应的特征向量，且 $\lambda=1$ 为二重根

所以存在可逆 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{\text{记}}{=}\boldsymbol{\Lambda}$

所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}^n=\boldsymbol{\Lambda}$

即 $\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^n\right)=\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Lambda}^n\right)=2$，选 A

8.设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 服从正态分布 $N(0,2)$，Y 服从正态分布 $N(-2,2)$，若 $P\{2X+Y<a\}=P\{X>Y\}$，则 $a=$

A. $-2-\sqrt{10}$.　　　　B. $-2+\sqrt{10}$.

C. $-2-\sqrt{6}$.　　　　D. $-2+\sqrt{6}$.

8．【答案】B

【解析】$E(2X+Y)=2EX+EY=-2$，$D(2X+Y)=4DX+DY=4\times2+2=10$

所以 $2X+Y\sim N(-2,10)$，$X-Y\sim N(2,4)$，$P\left\{\dfrac{2X+Y+2}{\sqrt{10}}<\dfrac{a+2}{\sqrt{10}}\right\}=\Phi\left(\dfrac{a+2}{\sqrt{10}}\right)$，

$P\left\{\dfrac{X-Y-2}{2}>\dfrac{0-2}{2}\right\}=1-\Phi(-1)=\Phi(1)$，$\dfrac{a+2}{\sqrt{10}}=1$，即 $a=\sqrt{10}-2$

9.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2(1-x),0<x<1\\0,其他.\end{cases}$ 在 $X=x(0<x<1)$ 条件下，随机变量 Y 服从区间 $(x,1)$ 上的均匀分布，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$

A. $-\dfrac{1}{36}$.　　　　B. $-\dfrac{1}{72}$.

C. $\dfrac{1}{72}$.　　　　D. $\dfrac{1}{36}$.

9．【答案】D

【解析】由题意可知 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$EX=\int_0^1 2x(1-x)\mathrm{d}x=2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

$$E(XY)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 2xy\mathrm{d}y=\frac{1}{4}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^y 2\mathrm{d}x=2y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}\quad EY=\int_0^1 2y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \mathrm{Cov}(XY)=\frac{1}{4}-\frac{2}{9}=\frac{1}{36}$$

10. 设随机变量 X,Y 相互独立，且均服从参数为 λ 的指数分布，令 $Z=|X-Y|$,则下列随机变量中与 Z 同分布的是

A. $X+Y$　　　　B. $\dfrac{X+Y}{2}$

C. $2X$　　　　D. X

10．【答案】D

【解析】X与Y的联合概率密度为 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，则 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{|X-Y|\le z\}$

① 当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

② 当 $z\ge 0$ 时，$F_Z(z)=P\{-z\le X-Y\le z\}=2P\{0\le X-Y\le z\}$

$$=2\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda y}dy\int_y^{y+z}\lambda e^{-\lambda x}dx.$$

$$=2\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda y}\left(e^{-\lambda y}-e^{-\lambda(y+z)}\right)dy$$

$$=2\int_0^{+\infty}\lambda e^{-2\lambda y}dy-2e^{-\lambda z}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-2\lambda y}dy$$

$$=1-e^{-\lambda z}.$$

所以 $Z\sim E(1)$，从而 Z与X服从相同的分布，选 D.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\sin x}-1}{x^3}=6$，则 $a=$______.

11.【答案】$a=6.$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\sin x}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x\ln(1+ax^2)}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\ln(1+ax^2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^3}{x^3}=6.$

所以 $a=6.$

12.设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $df(1,1)=3du+4dv$，令 $y=f(\cos x,1+x^2)$，

则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=$______.

12.【答案】5

【解析】由 $\mathrm{d}f(1,1)=3\mathrm{d}u+4\mathrm{d}v$，则 $f_x'(1.1)=3, f_y'(1.1)=4$，由 $y=f\left(\cos x,1+x^2\right)$

则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_1'\cdot(-\sin x)+f_2'\cdot 2x$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left[f_{11}''(-\sin x)+f_{12}''\cdot 2x\right](-\sin x)+f_1'\cdot(-\cos x)\ +\left(f_{21}''(-\sin x)+f_{22}''\cdot 2x\right)\cdot 2x+f_2'\cdot 2.$$

因此

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)(-1)+f_2'(1,1)\cdot 2=-3+8=5.$$

13. 已知函数 $f(x)=x+1$，若 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, x\in[0,\pi]$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}=$______.

13.【答案】$-\dfrac{1}{\pi}$

【解析】由

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}\sin nx=\frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n}\left((-1)^n-1\right)\right]=\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right).$$

当为奇数时，$a_n=-\dfrac{4}{n^2\pi}$，则 $a_{2n-1}=-\dfrac{4}{(2n-1)^2\pi}$，于是

$$\lim_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\sin\frac{-4}{(2n-1)^2\pi}=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{-4}{(2n-1)^2\cdot\pi}=-\frac{1}{\pi}.$$

14.微分方程 $y'=\dfrac{1}{(x+y)^2}$ 满足条件 $y(1)=0$ 的解为______.

14.【答案】 $\arctan(x+y)=y+\dfrac{\pi}{4}$

【解析】方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=(x+y)^2$

$$令\ u=x+y\ \ 则\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}-1$$

即 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=u^2+1$ 则 $\int\frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u=\int\mathrm{d}y$

$$\arctan u=y+c$$

代 $x=1,y=0,u=1$．得 $c=\frac{\pi}{4}$

得 $\arctan(x+y)=y+\frac{\pi}{4}$

15.设实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a+1 & a\\ a & a\end{pmatrix}$，若对任意实向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\right)^2\le\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$$

均成立，则 a 的取值范围是_______.

15.【答案】 $a\ge0$

【解析】易知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 可正交相似对角化且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为实数，

即存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}\ \Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$

又 $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 有 $\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\right)^2\le\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$，

即 $\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)^2\le\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$

记 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$

即 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\beta}_1\right)^2\le\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\beta}_1$

即 $\left(\lambda_1a_1b_1+\lambda_2a_2b_2\right)^2\le\left(\lambda_1a_1^2+\lambda_2a_2^2\right)\left(\lambda_1b_1^2+\lambda_2b_2^2\right)$

$$\lambda_1^2a_1^2b_1^2+\lambda_2^2a_2^2b_2^2+2\lambda_1\lambda_2a_1b_1a_2b_2\le \lambda_1^2a_1^2b_1^2+\lambda_2^2a_2^2b_2^2+\lambda_1\lambda_2a_1^2b_2^2+\lambda_1\lambda_2a_2^2b_1^2$$

$$\Rightarrow 2\lambda_1\lambda_2a_1b_1a_2b_2\le\lambda_1\lambda_2a_1^2b_2^2+\lambda_1\lambda_2a_2^2b_2^2\Rightarrow \lambda_1\lambda_2\left[a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2\right]\ge 0$$

$$\Rightarrow\lambda_1\lambda_2\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2\ge 0\Rightarrow\lambda_1\lambda_2\ge 0\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a+1 & a\\ a & a\end{vmatrix}=a^2+a-a^2=a\ge 0$$

16. 设随机试验每次成功的概率为 p，现进行 3 次独立重复试验，在至少成功 1 次的条件下，3 次试验全部成功的概率为 $\frac{4}{13}$，则 $p=$________.

16．【答案】 $p=\frac{2}{3}$

【解析】设事件 A：全成功，B：至少成功一次，则

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{p^3}{1-(1-p)^3}=\frac{4}{13},$$

$$13p^3=4-4(1-p)^3$$

整理得 $p(3p-2)(3p+6)=0\Rightarrow p=\frac{2}{3}$.

三、解答题：17 ~ 22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,\sqrt{1-y^2}\le x\le 1,-1\le y\le 1\right\}$，计算 $\iint\limits_D\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解析】

$$\iint\limits_D\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{1}\frac{r\cos\theta}{r}\cdot r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{1}\frac{r\cos\theta}{r}\cdot r\mathrm{d}r]$$

则

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}r\cos\theta\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\cdot\frac{1}{2}r^2\Big|_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\cdot\int_1^{\frac{1}{\sin\theta}}r\cos\theta\mathrm{d}r=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\frac{1}{2}r^2\Big|_1^{\frac{1}{\sin\theta}}\mathrm{d}\theta=\frac{3}{4}\sqrt{2}-1$$

故原积分为

$$\ln(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}-2$$

18. 已知函数 $f(x,y)=x^3+y^3-(x+y)^2+3$，Γ 为曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面. D 为 Γ 与坐标平面所围有界区域在 xOy 平面上的投影.

（1）求 Γ 的方程；（2）求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值与最小值.

【解析】（1）$F(x,y\cdot z)=x^3+y^3-(x+y)^2+3-z$.

则 $\begin{cases}F_x'=3x^2-2(x+y)\\F_y'=3y^2-2(x+y)\\F_z'=-1\end{cases}$ 记 $P(1,1,1)$.

$F_x'\big|_p=-1$. $F_y'\big|_p=-1$. $F_z'\big|_p=-1$.

即 $F(x,y,z)$ 在 $(1,1,1)$ 处的切平面方程的法向量为 $(-1,-1,-1)$，且过 $(1,1,1)$

所以 $(-1)(x-1)+(-1)(y-1)+(-1)(z-1)=0$

即 Γ 的方程为 $x+y+z=3$

（2）由（1）可知：有界区域在 xoy 平面上的投影为：$D=\{(x,y)|0\le x\le 3,0\le y\le 3-x\}$

（i）在区域 D 内：$\begin{cases}f_x'=3x^2-2(x+y)=0\\f_y'=3y^2-2(x+y)=0\end{cases}$ 得唯一驻点：$P_1\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$

（ii）在 x 轴上，$f(x,y)=x^3-x^2+3=g(x)\quad(0\le x\le 3)$

令 $g'(x)=3x^2-2x=0\Rightarrow x=\frac{2}{3}$. 所以 $P_2\left(\frac{2}{3},0\right)$

（iii）在 y 轴上，同理可得 $P_3\left(0,\frac{2}{3}\right)$

（iv）在直线 $y=3-x$，$f(x,y)=x^3+(3-x)^3-6=h(x)(0\le x\le 3)$

令 $h'(x)=3x^2-3(3-x)^2=0$　$P_4\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

端点 $P_5(0,0)$，$P_6(3,0)$，$P_7(0,3)$

代入各点，最大值 $f(3,0)=f(0,3)=21$，最小值为 $f\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{17}{27}$.

19. 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，且 $f'(0)=f'(1),\left|f''(x)\right|\le 1$. 证明：

（1）当 $x\in(0,1)$ 时，$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right|\le\frac{x(1-x)}{2}$；

（2）$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\le\frac{1}{12}$.

证明：（1）

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2$　（1）

$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2$　（2）

$(1-x)$（1）$+x$（2）

$\Rightarrow f(x)=f(0)(1-x)+f(1)x+f'(0)x(1-x)+f'(1)(x-1)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2x$

$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right|$

$\leqslant\frac{1}{2}x^2(1-x)+\frac{1}{2}x(1-x)^2$

$=\frac{1}{2}x(1-x)(x+1-x)$

$=\frac{x(1-x)}{2}$.

(2) $\left|\int_0^1[f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x]dx\right|=\left|\int_0^1 f(x)dx-f(0)\cdot\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_1^0-f(1)\cdot\frac{1}{2}\right|$

$=\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\leqslant\int_0^1\frac{x(1-x)}{2}dx=\frac{1}{12}$.

20. 已知有向曲线 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=2x$ 与平面 $2x-z-1=0$ 的交线. 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，计算曲线积分

$$\int_L\left(6xyz-yz^2\right)dx+2x^2zdy+xyzdz.$$

【解析】曲线在 xOy 平面上的投影为 $L_l:\begin{cases}5x^2-6x+y^2+1=0\\ z=0\end{cases}$. 方向为逆时针，记 L_l 围成的区域面积为 D.

则原积分 $=\int_{L_1}\left[6xy(2x-1)-y(2x-1)^2\right]dx+2x^2(2x-1)dy+xy(2x-1)d(2x)$

$=\int_{L_1}\left(12x^2-4x-1\right)ydx+\left(4x^3-2x^2\right)dy$

由格林公式，可得 $\iint_D\left(12x^2-4x\right)-\left(12x^2-4x-1\right)d\sigma=\iint_D d\sigma=S_D$

即 $\frac{\left(x-\frac{3}{5}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=1.S_D=\pi\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{25}\pi$.所以原积分为$\frac{4\sqrt{5}}{25}\pi$.

21. 已知数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $x_0=-1,y_0=0,z_0=2$, 且 $\begin{cases}x_n=-2x_{n-1}+2z_{n-1},\\ y_n=-2y_{n-1}-2z_{n-1},\\ z_n=-6x_{n-1}-3y_{n-1}+3z_{n-1},\end{cases}$ 记

$\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\\ z_n\end{pmatrix}$ 写出满足 $\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$，并求 $\boldsymbol{A}^n$ 及 $x_n,y_n,z_n(n=1,2,\cdots)$.

【解析】（1）由题意可知，$\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\\z_{n-1}\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&-2&-2\\-6&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\\z_{n-1}\end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&-2&-2\\-6&-3&3\end{pmatrix}$

（2）由 $\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda+2&0&-2\\0&\lambda+2&2\\6&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2)=0$

解得 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$

当 $\lambda_1=0$ 时，解得线性无关特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=1$ 时，解得线性无关特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=-2$ 时，解得线性无关特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&2&-2\\1&-3&0\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$

故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$

即

$$A^n=\left(P\Lambda P^{-1}\right)^n=P\Lambda^n P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&2&-2\\1&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&(-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&3&-2\\2&1&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(-1)^{n+1}2^n-4&(-1)^{n+1}2^n-2&2\\(-1)^n2^{n+1}+4&(-1)^n2^{n+1}+2&-2\\-6&-3&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\\z_{n-1}\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}x_{n-2}\\y_{n-2}\\z_{n-2}\end{pmatrix}$$

$$=A^n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^{n+1}2^n-4&(-1)^{n+1}2^n-2&2\\(-1)^n2^{n+1}+4&(-1)^n2^{n+1}+2&-2\\-6&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)^n+8\\(-2)^{n+1}-8\\12\end{pmatrix}$$

22. 设总体 X 服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 $X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},T_c=cX_{(n)}$.

（1）求 c，使得 T_c 是 θ 的无偏估计;

（2）记 $h(c)=E(T_c-\theta)^2$，求 c 使得 $h(c)$ 最小.

22．【解】（1）$E\left[cX_{(n)}\right]=cEX_{(n)}=cE\max\{X_1,X_2\cdots X_n\}=\theta$

$$f_X(x)\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & 0<x<\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\leqslant x<\theta\\ 1, & x\geqslant\theta\end{cases}$$

$$\max\{X_1,X_2\cdots X_n\}\sim F_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^n}{\theta^n}, & 0\leqslant x<\theta\\ 1, & x\geqslant\theta\end{cases}$$

$$f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta^n}\cdot x^{n-1} & 0<x<\theta\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$$

$$E\max\left\{X_1,\cdots,X_n\right\}=\int_0^\theta \frac{nx}{\theta^n}x^{n-1}\mathrm{d}\,\theta=\frac{1}{\theta^n}\cdot\frac{n}{n+1}x^{n+1}\Big|_\theta^\theta=\frac{n}{n+1}\theta\,,$$

所以 $c=\dfrac{n+1}{n}$.

(2) $h(c)=E\left(T_c^2+\theta^2-2T_c\theta\right)=ET_c^2+E\theta^2+2\theta ET_c$

$$=E\left(cX_{(n)}\right)^2+\theta^2-2\theta E\left(cX_{(n)}\right)=c^2EX_{(n)}^2+\theta^2-2c\theta EX_{(n)}$$

因为 $EX_{(n)}^2=\displaystyle\int_0^\theta \frac{nx^2}{\theta^n}\cdot x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta^n}\cdot\frac{n}{n+2}x^{n+2}\Big|_0^\theta=\theta^2\cdot\frac{n}{n+2}$

$$EX_{(n)}=\int_0^\theta\cdot\frac{nx}{\theta^n}\cdot x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta^n}\cdot\frac{n}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^\theta=\frac{n}{n+1}\theta$$

所以 $h(c)=\dfrac{n}{n+2}c^2\theta^2+\theta^2-2c\theta\cdot\dfrac{n}{n+1}\theta=\left(\dfrac{nc^2}{n+2}+1-2c\cdot\dfrac{n}{n+1}\right)\theta^2$

令 $f(x)=\dfrac{n}{n+2}x^2+1-2\dfrac{n}{n+1}x$， $f'(x)=\dfrac{2n}{n+2}x-\dfrac{2n}{n+1}=0$

解得 $x=\dfrac{n+2}{n+1}$， 即 $c=\dfrac{n+2}{n+1}$ 时， $h(c)$ 取最小值.