考研数学预测 8 套卷 卷（六）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点.
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内.超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效.
3. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用2B铅笔填涂.
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回.

（以下信息考生必须认真填写）

考生编号															
考生姓名															

一、选择题：1～10小题，每小题5分，共50分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的．

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{1}^{\frac{i}{n}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=$

(A) $1-2\cos 1$.　　(B) $\cos 1-1$.

(C) $1-2\sin 1$.　　(D) $\sin 1-1$.

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足 $f(x_0)=g(x_0)$，$f'(x_0)<g'(x_0)$，则必存在 $\delta>0$，使得

(A) 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 时，有 $f(x)<g(x)$．

(B) 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 时，有 $f(x)>g(x)$．

(C) 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，有 $f(x)>g(x)$，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，有 $f(x)<g(x)$．

(D) 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，有 $f(x)<g(x)$，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，有 $f(x)>g(x)$．

3. 设方程 $y''+ay'+y=(x+1)\mathrm{e}^{bx}$ 的每一个解 $y=y(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上均有界，则实数 a，b 满足

(A) $a\geqslant 0$，$b<0$.　　(B) $a\geqslant 0$，$b>0$.　　(C) $a>0$，$b>0$.　　(D) $a<0$，$b>0$.

4. 若 $\dfrac{(y^2+2xy+ax^2)\mathrm{d}x-(x^2+2xy+by^2)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$ 为某函数 $u(x,y)$ 的全微分，则

(A) $a=1$，$b=1$.　　(B) $a=1$，$b=-1$.

(C) $a=-1$，$b=1$.　　(D) $a=-1$，$b=-1$.

5. 设3阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $r(\boldsymbol{BA})<r(\boldsymbol{AB})$，对于以下结论

① $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BAx}=\boldsymbol{0}$ 有非零公共解；

② $\boldsymbol{ABABx}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BABBx}=\boldsymbol{0}$ 有非零公共解．

正确的说法是

(A) ①正确，②正确．　　(B) ①正确，②错误．

(C) ①错误，②正确．　　(D) ①错误，②错误．

6. 以下两个矩阵，可用同一可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 相似对角化的是

(A) $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$.

7. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&a-6&-2\\a+3&1&-4\\4&2&-4\end{pmatrix}$，则 $a=1$ 是存在两个不同的3阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 成立的

(A) 充分必要条件.　　(B) 充分非必要条件.

(C) 必要非充分条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

8. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\alpha^2}, & 0\leqslant x\leqslant\alpha,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $\alpha(\alpha>1)$ 是未知参数，X_1，X_2，$\cdots$，X_n 是来自总体 X 的简单随机样本，记 $p=P\{0<X<\sqrt{\alpha}\}$，$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，$X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，则 p 的最大似然估计量 $\hat{p}$ 为

(A) $\sqrt{X_{(1)}}$.　　(B) $\sqrt{X_{(n)}}$.　　(C) $\dfrac{1}{X_{(1)}}$.　　(D) $\dfrac{1}{X_{(n)}}$.

9. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{C\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 其中 $C>0$，$\sigma>0$. 记标准正态分布函数为 $\Phi(t)$，概率密度为 $\varphi(t)$，则 C 的值与 X 的期望 EX 分别为

(A) $\Phi\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)$，$\mu+\varphi\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)\dfrac{\sigma}{\Phi\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)}$.　　(B) $\Phi\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)$，$\mu+\varphi\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)\dfrac{\sigma\mu}{\Phi\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)}$.

(C) $\Phi\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)+\mu$，$\varphi\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)\dfrac{\sigma}{\Phi\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)}$.　　(D) $\Phi\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)+\mu$，$\varphi\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)\dfrac{\sigma\mu}{\Phi\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)}$.

10. 设随机变量 X,Y,Z 满足 $DX=DZ$，$DY=4DX$，且 $\rho_{XY}=-1$，$\rho_{XZ}=\dfrac{1}{2}$，则 X 与 $Y+Z$ 的相关系数为

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　(B) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　(C) $\dfrac{3}{4}$.　　(D) $-\dfrac{3}{4}$.

二、填空题：11～16小题，每小题5分，共30分.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{\sin x}-\dfrac{2}{x}\right)=$_____.

12. 设可微函数$f(x)$及其反函数$g(x)$满足关系式$\int_1^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}-8\right)(x>0)$，则$f(x)=$_____.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2^n}(x-1)^{2n}$的收敛域为_____.

14. $\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y\int_{(x^2+y^2)^2}^{0}x^2\mathrm{d}z=$_____.

15. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2-ax_3)^2+(ax_3+x_1)^2$的秩为2，则$a=$_____.

16. 设A，B，C为随机事件，A与B相互独立，且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{3}$，$P(B\cup C)=\dfrac{2}{3}$，则$P(AB\cup C)=$_____.

三、解答题：17～22小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分10分）

求曲线$y=\dfrac{1+\int_0^{\frac{1}{x}}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}(x>0)$的斜渐近线.

18.(本题满分 12 分)

设 $y=y(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$ 具有二阶连续导数，曲线 $y=y(x)$ 为凸的，且位于第一象限，在其上每一点的曲率等于 $\dfrac{y}{(2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$，又设该曲线在原点与直线 $y=x$ 相切，求曲线的表达式.

19.(本题满分 12 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\mathrm{e}^x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数.

启航教育

20.(本题满分12分)

计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\dfrac{\mathrm{e}^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧.

启航教育

21.(本题满分 12 分)

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ a & 2 & -3\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，其中 $|\boldsymbol{A}|>0$.

(1)求 a 的值；

(2)求 $\boldsymbol{A}^{99}$.

启航教育

22.(本题满分12分)

设商场某日的顾客总数N服从泊松分布$P(\lambda)$，单个顾客每次的消费额为1(单位：元)，令X_j表示第j个顾客n次试验消费的次数，X_j与N独立且服从二项分布$B(n,p)$.

(1)已知$N=m(m>0)$的条件下，求全天营业额S的概率分布；

(2)计算$E(S|N)$；

(3)计算ES.

启航教育