

2026 考研数学（二）真题

试卷及解析

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时， $ax^2 + bx + \arcsin x$ 与 $\sqrt[3]{1+x^2} - 1$ 是等价无穷小，则

A. $a = \frac{1}{3}, b = -1$.

B. $a = \frac{1}{3}, b = 1$.

C. $a = \frac{2}{3}, b = -1$.

D. $a = \frac{2}{3}, b = 1$.

1. 【答案】A

【解析】由题意得 $x \rightarrow 0$ 时， $\sqrt[3]{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{3}x^2$,

$$ax^2 + bx + \arcsin x = ax^2 + bx + x + o(x^2) = (b+1)x + ax^2 + o(x^2).$$

由于 $ax^2 + bx + \arcsin x$ 与 $\sqrt[3]{1+x^2} - 1$ 为等价无穷小，则

$$(b+1)x + ax^2 + o(x^2) \sim \frac{1}{3}x^2.$$

故 $\begin{cases} b+1=0, \\ a=\frac{1}{3}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=-1, \\ a=\frac{1}{3}. \end{cases}$ 故选 A.

2. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是某 2 阶非齐次线性微分方程的两个特解，若常数 λ, μ 使得

$2\lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$ 是该方程的解， $\lambda y_1(x) - 2\mu y_2(x)$ 是该方程对应的齐次方程的解，则

A. $\lambda = \frac{1}{5}, \mu = \frac{2}{5}$.

B. $\lambda = \frac{2}{5}, \mu = \frac{1}{5}$.

C. $\lambda = \frac{1}{4}, \mu = \frac{1}{2}$.

D. $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{4}$.

2. 【答案】B

【解析】由线性微分方程解的叠加原理可得，要使 $2\lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$ 为非齐次解，系数必须满足 $2\lambda + \mu = 1$ ；要使 $\lambda y_1(x) - 2\mu y_2(x)$ 为齐次方程的解，要求 $\lambda - 2\mu = 0$ 。

$$\text{故} \begin{cases} 2\lambda + \mu = 1, \\ \lambda = 2\mu, \end{cases} \text{解得} \mu = \frac{1}{5}, \lambda = \frac{2}{5}. \text{故选 B.}$$

3. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x - az = e^{y+az}$ (a 是非零常数) 确定，则

$$\text{A. } \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}.$$

$$\text{B. } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}.$$

$$\text{C. } \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{a}.$$

$$\text{D. } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{a}.$$

3. 【答案】A

【解析】(法一) 由全微分不变性得 $dx - adz = e^{y+az}(dy + adz)$,

$$\text{整理得: } (ae^{y+az} + a)dz = dx - (e^{y+az})dy, \text{ 故 } dz = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{e^{y+az} + 1} dx + \frac{-e^{y+az}}{e^{y+az} + 1} dy \right].$$

$$\text{故 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{1}{e^{y+az} + 1}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a} \left(\frac{-e^{y+az}}{e^{y+az} + 1} \right), \text{ 故可得 } \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}, \text{ 选 A.}$$

(法二) 隐函数公式法: 构造 $F(x, y, z) = x - az - e^{y+az}$,

$$\text{由} \begin{cases} F'_x = 1 \\ F'_y = -e^{y+az} \\ F'_z = -a - ae^{y+az} \end{cases}, \text{ 故 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1}{-a[1 + e^{y+az}]} = \frac{1}{a[1 + e^{y+az}]},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-e^{y+az}}{-a[1 + e^{y+az}]} = -\frac{e^{y+az}}{a[1 + e^{y+az}]}, \text{ 故 } \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}, \text{ 选 A.}$$

4. 设线密度为 1 的细直棒的两个端点分别位于点 $(-1, 0)$ 和点 $(1, 0)$ 处，质量为 m 的质点位于点 $(0, 1)$ 处， G 为引力常量，则该细直棒对该质点的引力大小为

$$\text{A. } \int_0^1 \frac{2Gmx}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} dx.$$

$$\text{B. } \int_0^1 \frac{2Gm}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} dx.$$

C. $\int_0^1 \frac{2Gmx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx.$

D. $\int_0^1 \frac{2Gm}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx.$

4. 【答案】D

【解析】细直棒位于 x 轴上 $[-1,1]$ ，取棒上任意微元，微元位置 x ， $x \in (-1,1)$ ，长度为 dx 。

由万有引力定律，两质点的距离为 $r = \sqrt{x^2+1^2} = \sqrt{1+x^2}$ 。

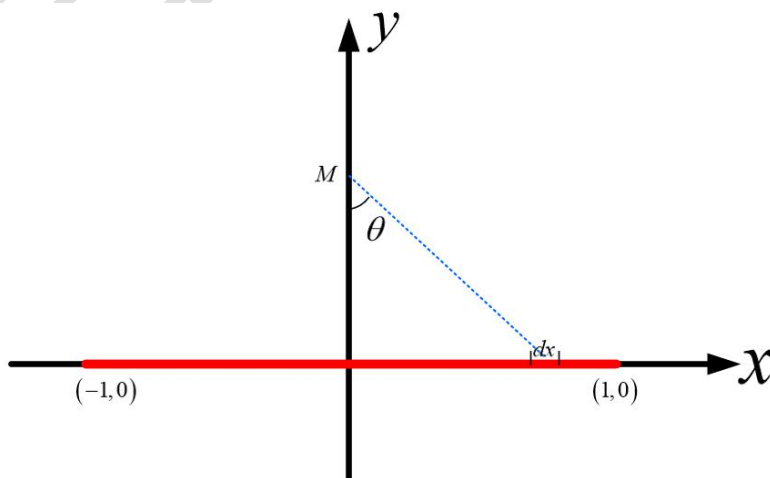
引力微元 dF 的大小为 $dF = G \cdot \frac{mdx}{(1+x^2)}$ 。

X 方向：由于棒关于 y 轴对称（ x 与 $-x$ 处的微元， x 分量大小相等、方向相反），故引力的水平分力为 0。

Y 方向：引力微元的 y 分量为 $dF_y = dF \cos \theta$ ，其中 $\cos \theta = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ （ θ 是引力方向与 y 轴的夹角）。因此， Y 方向的引力微元为： $dF_y = G \frac{mdx}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{Gmdx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ 。

最后积分计算总引力，利用对称性， $[-1,0]$ 与 $[0,1]$ 的引力贡献相同。

因此总引力大小为 $F = 2 \int_0^1 \frac{Gm}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ ，故选 D。



5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有定义, 则

A. 当 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递减, 在 $(0, 1)$ 单调递增时, $f(0)$ 是极小值.

B. 当 $f(0)$ 是极小值时, $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递减, 在 $(0, 1)$ 单调递增.

C. 当 $f(x)$ 的图形在 $[-1, 1]$ 是凹的时, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1, 1]$ 单调递增.

D. 当 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1, 1]$ 单调递增时, $f(x)$ 的图形在 $[-1, 1]$ 是凹的.

5. 【答案】C

【解析】对 A 选项: 取 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 知 $f(0)$ 不是极小值, 排除;

对 B 选项: 取 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 知 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单增, 且 $f(x)$ 在

$(0, 1)$ 单减, 但仍满足 $f(0)$ 是极小值, 排除;

对 C 选项: 若 $f(x)$ 的图形在 $[-1, 1]$ 上是凹的, 则对任意 $x_1 < x_2 < 1$, 有

$$\frac{f(1)-f(x_1)}{1-x_1} \leq \frac{f(1)-f(x_2)}{1-x_2}, \text{ 即 } \frac{f(x_1)-f(1)}{x_1-1} \leq \frac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1}, \text{ 故 } \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \text{ 在 } [-1, 1]$$

单调递增, 因此 C 正确;

对 D 选项, 取 $f(x) = x^4 - x^3$ 时, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 单增, 但 $f''(x) = 6x(2x-1)$ 在 $[-1, 1]$ 不恒大于 0, 故不是凹曲线, 排除.

6. 已知函数 $f(x) = \int_1^{x^3} \frac{e^t}{1+t^2} dt$, f 的反函数为 g , 则

A. $g(0) = 1, g'(0) = \frac{3}{2}e.$

B. $g(0) = 1, g'(0) = \frac{2}{3e}.$

C. $g(1) = 0, g'(1) = \frac{3}{2}e.$

D. $g(1) = 0, g'(1) = \frac{2}{3e}.$

6. 【答案】B

【解析】由题知，当 $x=1$ 时， $f(1)=0$ ，故 $g(0)=1$ 。

$$\text{又 } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^{x^3} \frac{e^t}{1+t^2} dt}{x - 1} = \frac{3e}{2},$$

$$\text{由 } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \text{ 知 } f'(1) = \frac{1}{g'(0)}, \text{ 故 } g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2}{3e}. \text{ 选 B.}$$

7. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 上连续，且 $f(x, y) = f(y, x)$ ，

$$\text{则 } \iint_D f(x, y) dx dy =$$

A. $2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1-i}^n f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \frac{1}{n^2}.$

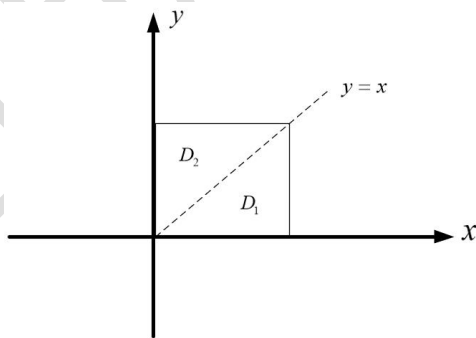
B. $\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \frac{1}{n^2}.$

C. $2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n+1-i} f\left(\frac{i}{2n}, \frac{j}{2n}\right) \frac{1}{n^2}.$

D. $\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^i f\left(\frac{i}{2n}, \frac{j}{2n}\right) \frac{1}{n^2}.$

7. 【答案】D

【解析】由题知，对应的图形如下图所示：



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_1} f(y, x) dx dy$$

$$= 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy.$$

$$\text{对 D, 令 } \begin{cases} \frac{i}{2n} \rightarrow x, \\ \left(\frac{1}{2n}, \frac{2n}{2n}\right) \rightarrow (0, 1), \\ \frac{1}{2n} \rightarrow dx, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{j}{2n} \rightarrow y, \\ \left(\frac{1}{2n}, \frac{i}{2n}\right) \rightarrow (0, x), \\ \frac{1}{2n} \rightarrow dy, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^i f\left(\frac{i}{2n}, \frac{j}{2n}\right) \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^i f\left(\frac{i}{2n}, \frac{j}{2n}\right) \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy. \end{aligned}$$

选 D.

对 A, 对应积分形式为 $2 \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 f(x, y) dy$.

对 B, 对应积分形式为 $\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy$.

对 C, 对应积分形式为 $8 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$.

8. 单位矩阵经过若干次互换两行得到的矩阵称为置换矩阵. 设 A 为 n 阶置换矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则

A. A^* 为置换矩阵.

B. A^{-1} 为置换矩阵.

C. $A^{-1} = A^*$.

D. $A^{-1} = -A^*$.

8. 【答案】B

【解析】设 $A = E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \cdots E_{i_n j_n}$, 由于 $(E_{ij})^T = E_{ij}, (E_{ij})^{-1} = E_{ij}$, 故

$A^{-1} = (E_{i_n j_n})^{-1} \cdots (E_{i_2 j_2})^{-1} \cdot (E_{i_1 j_1})^{-1} = E_{i_n j_n} \cdots E_{i_2 j_2} E_{i_1 j_1}$, 仍为置换矩阵, 故选 B.

$A^* = |A| \cdot A^{-1} = (-1)^n A^{-1}$, n 为偶数时, 为置换矩阵; n 为奇数时, 不为置换矩阵, 故

A, C, D 错.

9. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, 若存在矩阵 B 满足 $AB = C$, 则

- A. $a = -1, b = -1$. B. $a = 2, b = 2$.
C. $a = -1, b = 2$. D. $a = 2, b = -1$.

9. 【答案】A

【解析】设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), C = (r_1, r_2)$

由 $AB = C$ 得, B 的列向量为 $Ax = r_1, Ax = r_2$ 的解, 由 $Ax = r_1$ 有解得 $r(A) = r(A, r_1)$,

故 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & a-1 \end{pmatrix}$ 的最后两行成比例, 即 $\frac{1}{-2} = \frac{1}{a-1}$, 解得 $a = -1$.

同理, 由 $Ax = r_2$ 有解得 $r(A) = r(A, r_2)$ 故最后两行成比例 $\frac{1}{-2} = \frac{1}{b-1}$, 解得 $b = -1$.

故选 A.

10. 设 3 阶矩阵 A, B 满足 $AB + BA = A^2 + B^2$, 且 $A \neq B$, 则下列结论错误的是

- A. $(A - B)^3 = O$.
B. $A - B$ 只有零特征值.
C. A, B 不能都是对角矩阵.
D. $A - B$ 只有一个线性无关的特征向量.

10. 【答案】D

【解析】 $AB + BA = A^2 + B^2$,

$$AB - A^2 + BA - B^2 = O,$$

$$A(B - A) + B(A - B) = O,$$

$$A(B-A) - B(B-A) = O,$$

$$(A-B)(B-A) = O,$$

$$-(A-B)^2 = O,$$

$$\text{故 } (A-B)^2 = O.$$

A 选项: $(A-B)^3 = (A-B)^2 \cdot (A-B) = O$ 成立;

B 选项: 由 $(A-B)^2 = O$ 可得, $f((A-B)^2) = O$, 故 $(A-B)^2$ 只有零特征值. 设 $(A-B)$ 的特征值为 λ , 则 $(A-B)^2$ 的特征值 $\lambda^2 = 0$, 故 $A-B$ 也只有零特征值;

C 选项: 若 A, B 都是对角矩阵, 则 $A-B$ 也为对角阵, 而对角矩阵的平方为零;

当且仅当自身为零矩阵 (对角元平方为零则对角元为零), 但 $A \neq B$, 即 $A-B \neq O$. 故 A, B 不能都是对角阵;

D 选项: 设 $C = A-B$ 满足 $C^2 = O$, 但 C 的线性无关特征向量个数不一定为 1,

举特例为 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 满足 $C^2 = O$.

而 C 有 2 个线性无关的特征向量, 故选 D.

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. 设 p 为常数, 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p(x+1)} dx$ 收敛, 则 p 的取值范围是_____.

11. 【答案】 $0 < p < 2$

【解析】 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p(x+1)} dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^p(x+1)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p(x+1)} dx = I_1 + I_2.$

对于 I_1 , 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{\arctan x}{x^p(x+1)} \sim \frac{x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}}$, 故当 $p-1 < 1$ 时收敛, 即 $p < 2$;

对于 I_2 , 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{\arctan x}{x^p(x+1)} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{p+1}}$, 故当 $p+1 > 1$ 时收敛, 即 $p > 0$.

综上, I 收敛时, $0 < p < 2$.

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x \sin x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x \sin x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right] - \left[x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right]}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

13. 曲线 $x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 = 1$ 在点 $(0,1)$ 处的曲率半径为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 【答案】 4

【解析】 由 $x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 = 1$, 求导得

$$2x + 2\sqrt{3}y + 2\sqrt{3}xy' + 2yy' = 0 \text{ ——①}$$

代入 $x=0, y=1$ 知 $y'(0) = -\sqrt{3}$.

对①继续两边 x 求导得:

$$2 + 2\sqrt{3}y' + 2\sqrt{3}y' + 2\sqrt{3}xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0.$$

代入 $x=0, y=1, y'(0)=-\sqrt{3}$ 得 $y''(0)=2$.

由曲率公式知 $k = \frac{|y''(0)|}{[1+(y'(0))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4}$, 故曲率半径为 $R = \frac{1}{k} = 4$.

14. 已知函数 $f(x, y)$ 可微, 且 $df(0, 0) = \pi dx + 3dy$. 记 $g(x) = f(\ln x, \sin \pi x)$, 则 $g'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 【答案】 -2π

【解析】由 $df(0, 0) = \pi dx + 3dy$ 知, $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \pi, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,0)} = 3$.

故 $g'(x) = f'_1 \cdot \frac{1}{x} + f'_2 \cdot \pi \cos \pi x$. 因此 $g'(1) = \pi \cdot 1 + 3 \cdot \pi \cos \pi = -2\pi$.

15. 函数 $f(x) = \ln(2+x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的平均值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 【答案】 $3 \ln 2 - 1$

【解析】 $f(x) = \frac{1}{2} \int_0^2 \ln(2+x) dx \xrightarrow[x=e^t-2]{\text{令 } t=\ln(2+x)} \frac{1}{2} \int_{\ln 2}^{2 \ln 2} t e^t dt$
 $= \frac{1}{2} (t e^t - e^t) \Big|_{\ln 2}^{2 \ln 2} = \frac{1}{2} (6 \ln 2 - 2) = 3 \ln 2 - 1$.

16. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ a+2 & 3 & -3a \end{pmatrix}$. 若二次型 $\mathbf{x}^T (AA^T) \mathbf{x}$ 的规范形为 y_1^2 , 则 $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$

16. 【答案】 2

【解析】由题可知, 二次型 $\mathbf{x}^T AA^T \mathbf{x}$ 的规范形为 y_1^2 , 因此矩阵 AA^T 的秩为 1, 故 A

的秩为 1, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ a+2 & 3 & -3a \end{pmatrix}$ 的两行对应成比例,

$$\frac{1}{a+2} = \frac{b}{3} = \frac{1}{3a},$$

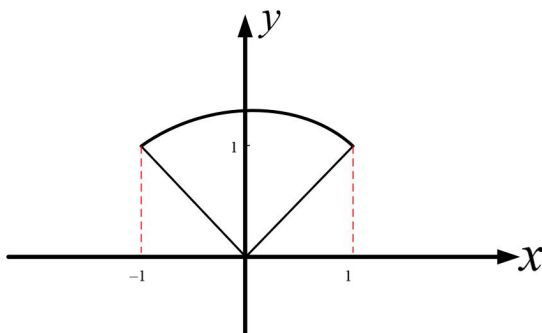
即 $\begin{cases} 3 = (a+2)b, \\ -3ab = -3. \end{cases}$ 联立解得 $a=1, b=1$. 故 $a+b=2$.

三、解答题：17~22 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分)

$$\text{计算 } I = \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} y \sin \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

17. 【解】如图所示，



令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r \sin \theta \sin r \cdot r dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cdot \sin r dr,$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta d\theta &= -\cos \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}, \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sin r dr = \int_0^{\sqrt{2}} r^2 d(-\cos r) \\ &= -r^2 \cos r \Big|_0^{\sqrt{2}} + \int_0^{\sqrt{2}} 2r \cdot \cos r dr = 2\sqrt{2} \sin \sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

$$\text{故 } I = \sqrt{2} \cdot (2\sqrt{2} \sin \sqrt{2} - 2) = 4 \sin \sqrt{2} - 2\sqrt{2}.$$

18. (本题满分 12 分)

已知函数 $g(x)$ 连续. 设 $f(x) = \int_0^{x^2} g(xt) dt$, 求 $f'(x)$ 的表达式, 并判断 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

18. 【解】当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = \int_0^{x^2} g(xt) dt \xrightarrow{u=xt} \int_0^{x^3} g(u) \frac{1}{x} du = \frac{1}{x} \int_0^{x^3} g(u) du.$

对 $f(x)$ 求导得, $f'(x) = \frac{g(x^3)3x^3 - \int_0^{x^3} g(u) du}{x^2} = 3x \cdot g(x^3) - \frac{\int_0^{x^3} g(u) du}{x^2}.$

在 $x=0$ 处, 由定义式可得 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^3} g(u) du}{x^2} = 0.$

$$\text{故 } f'(x) = \begin{cases} 3x \cdot g(x^3) - \frac{\int_0^{x^3} g(u) du}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[3x \cdot g(x^3) - \frac{\int_0^{x^3} g(u) du}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 3x \cdot g(x^3) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^3} g(u) du}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 g(x^3)}{2x} = 0, \end{aligned}$$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

19. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = (2x^2 - y^2)e^x$ 的极值.

19. 【解】由题可知, $f'_x = 4xe^x + (2x^2 - y^2)e^x, f'_y = -2ye^x.$

$$\text{令 } \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$\text{又 } A = f''_{xx} = e^x(2x^2 + 8x + 4 - y^2), B = f''_{xy} = -2ye^x, C = f''_{yy} = -2e^x,$$

故 $AC - B^2 \Big|_{(0,0)} = -8 < 0, AC - B^2 \Big|_{(-2,0)} = 8e^{-4} > 0$ 且 $A_{(-2,0)} = -4e^{-2} < 0$, 则 $(0,0)$ 为非极值

点, $(-2,0)$ 为极大值点且极大值 $f(-2,0) = \frac{8}{e^2}.$

20. (本题满分 12 分)

已知 $M(x_0, y_0)$ 是曲线 $y = \frac{1}{1+x^2} (x \geq 0)$ 的拐点, O 为坐标原点. 记 D 是第一象限中以曲线 $y = \frac{1}{1+x^2} (x \geq x_0)$, 线段 OM 及 x 正半轴为边界的无界区域, 求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

20. 【解】由题可知 $y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, y'' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$.

令 $y'' = 0$ 且 $x_0 > 0$, 解得 $\begin{cases} x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ y_0 = \frac{3}{4}. \end{cases}$

OM 直线段为 $y = \frac{3}{4}\sqrt{3}x, x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$,

则旋转体的体积 $V = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \pi \cdot \left(\frac{3}{4}\sqrt{3}x\right)^2 dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty} \pi \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$,

其中

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \pi \left(\frac{3}{4}\sqrt{3}x\right)^2 dx = \frac{27}{16} \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{16} \pi,$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty} \pi \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \stackrel{\text{令 } x=\tan \theta}{=} \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^2}{6} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{8} \pi\right)$$

故体积 $V = \frac{\sqrt{3}}{16} \pi + \frac{1}{6} \pi^2 - \frac{\sqrt{3}}{8} \pi = \frac{1}{6} \pi^2 - \frac{\sqrt{3}}{16} \pi$.

21. (本题满分 12 分)

求微分方程 $x^2 y'' - 2xy' - (y')^2 = 0 (x > 2)$ 满足条件 $y|_{x=3} = \frac{1}{2}, y'|_{x=3} = -9$ 的解.

21. 【解】此方程属于二阶可降阶中的不显含 y 的类型.

令 $p = y', y'' = \frac{dp}{dx} = p'$, 则代入原方程可得, $x^2 p' - 2xp - p^2 = 0$,

整理得 $p' - \frac{2}{x}p = x^{-2}p^2$.

令 $z = p^{-1}$, $z' = -p^{-2} \frac{dp}{dx} = -p^{-2}p'$, 代入上式得 $z' + \frac{2}{x}z = -x^{-2}$.

故 $z = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left(\int e^{\int \frac{2}{x} dx} \cdot (-x^{-2}) dx + C \right) = -\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$. 又 $z|_{x=3} = \frac{1}{y'(3)} = -\frac{1}{9}$ 代入上式: $C = 2$.

故 $\frac{1}{y'} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$, $y' = \frac{x^2}{2-x} = -x - 2 - \frac{4}{x-2}$, 则 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 4\ln(x-2) + C$,

又 $y|_{x=3} = \frac{1}{2}$ 代入上式, $C = 11$, 故 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 4\ln(x-2) + 11$.

22. (本题满分 12 分)

已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 记

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $G = (\alpha_1, \alpha_2)$.

(1) 证明: α_1, α_2 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组;

(2) 求矩阵 H 使得 $A = GH$, 并求 A^{10} .

$$22. (1) \text{【证明】 } A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$r(A) = 2$ 且 α_1, α_2 线性无关. 又 $\alpha_3 = -\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2$, 所以 α_1, α_2 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组.

$$(2) \text{【解】 } A = (\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{4 \times 4} = (\alpha_1, \alpha_2)_{4 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 4},$$

$$\text{即 } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 故可得 } A^{10} = GHGH \cdots GH = GD^9H,$$

$$\text{其中 } \mathbf{D} = \mathbf{HG} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

$$\text{又 } \mathbf{D}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{由此可推出 } \mathbf{D}^9 = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^{10} = \mathbf{GD}^9\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -9 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 9 & 10 & -10 \\ -1 & 7 & 8 & -8 \end{pmatrix}.$$