# 2026 考研数学（三） 真题

## 试卷及解析

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．曲线 $y=xe^{\frac{1}{x}}$

A．无水平渐近线，无铅直渐近线．

B．有水平渐近线，有铅直渐近线．

C．无水平渐近线，有铅直渐近线．

D．有水平渐近线，无铅直渐近线．

1．【答案】C

【解析】 $y=xe^{\frac{1}{x}}$ 的无定义点为 $x=0$．

当 $x\to0$ 时， $\lim\limits_{x\to0^+}xe^{\frac{1}{x}}\xlongequal{\text{令}x=\frac{1}{t}}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$，故 $x=0$ 为铅直渐近线.

又 $x\to\infty$ 时， $\lim\limits_{x\to\infty}xe^{\frac{1}{x}}\xlongequal{\text{令}x=\frac{1}{t}}\lim\limits_{t\to0}\frac{e^t}{t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}=\infty$，故无水平渐近线.选 C.

2．设函数 $z=z(x,\ y)$ 由方程 $x-az=e^{y+az}$（$a$ 是非零常数）确定，则

A．$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$．

B．$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$．

C．$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{a}$．

D．$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{a}$．

2．【答案】A

【解析】（法一）由微分形式不变性得 $dx-adz=e^{y+az}(dy+adz)$，

整理得：$\left(ae^{y+at}+a\right)\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\left(e^{y+az}\right)\mathrm{d}y$，故 $\mathrm{d}z=\dfrac{1}{a}\left[\dfrac{1}{e^{y+az}+1}\mathrm{d}x+\dfrac{-e^{y+az}}{e^{y+az}+1}\mathrm{d}y\right]$.

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{e^{y+az}+1},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{-e^{y+az}}{e^{y+az}+1}\right)$.

显然：$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$，选 A.

（法二）构造 $F(x,y,z)=x-az-e^{y+az}$，

由 $\begin{cases}F_x'=1,\\ F_y'=-e^{y+az},\\ F_z'=-a-e^{y+az}\cdot a,\end{cases}$ 故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{1}{-a\left[1+e^{y+az}\right]}=\frac{1}{a\left[1+e^{y+az}\right]},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{-e^{y+az}}{-a\left[1+e^{y+az}\right]}=-\frac{e^{y+az}}{a\left[1+e^{y+az}\right]}.$$

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$，选 A.

3．已知函数 $f(x)=\int_1^{x^3}\dfrac{e^t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，$f$ 的反函数为 $g$，则

A．$g(0)=1,g'(0)=\dfrac{3}{2}e$.　　B．$g(0)=1,g'(0)=\dfrac{2}{3e}$.

C．$g(1)=0,g'(1)=\dfrac{3}{2}e$.　　D．$g(1)=0,g'(1)=\dfrac{2}{3e}$.

3．【答案】B

【解析】由题知，当 $x=1$ 时，$f(1)=0$，故 $g(0)=1$.

又 $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_1^{x^3}\frac{e^t}{1+t^2}\mathrm{d}t}{x-1}=\dfrac{3e}{2}$，

由 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$ 知 $f'(1)=\dfrac{1}{g'(0)}$，故 $g'(0)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{2}{3\mathrm{e}}$.选 B.

4．设 $t$ 时刻某证券的交易单价为 $p(t)$，某机构持有该证券的份额为 $q(t)$，若该机构在 $t\in[0,T]$ 持续购入一定份额该证券，则这些证券的平均购入价格为

A．$\dfrac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t$.

B．$\dfrac{1}{q(T)-q(0)}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t$.

C．$\dfrac{1}{T}\int_0^T p(t)q'(t)\mathrm{d}t$.

D．$\dfrac{1}{q(T)-q(0)}\int_0^T p(t)q'(t)\mathrm{d}t$.

4．【答案】D

【解析】由题知在 $t$ 时刻，机构买入的价格为 $p(t)q'(t)$.

在 $[0,T]$ 时间段内，机构持续买入金额为 $\int_0^T p(t)q'(t)\mathrm{d}t$.

故平均买入价格为 $\dfrac{1}{q(T)-q(0)}\int_0^T p(t)q'(t)\mathrm{d}t$，选 D.

5．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&3\\1&1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\1&1\\a&b\end{pmatrix}$,若存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，则

A．$a=-1,b=-1$.

B．$a=2,b=2$.

C．$a=-1,b=2$.

D．$a=2,b=-1$.

5．【答案】A

【解析】设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 得，$\boldsymbol{B}$ 的列向量为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{r}_2$ 的解

由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{r}_1$ 有解得 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{r}_1)$，

故$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & a-1 \end{pmatrix}$的最后两行成比例，即$\frac{1}{-2}=\frac{1}{a-1}$，解得$a=-1$

同理，由$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{r}_2$有解得$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{r}_2)$，故最后两行成比例$\frac{1}{-2}=\frac{1}{b-1}$，解得$b=-1$.

故选 A.

6．设$\boldsymbol{A}$为 3 阶非零矩阵，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，若$\boldsymbol{A}^*=-2\boldsymbol{A}$，则$\boldsymbol{A}^2=$

A．$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.　　B．$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

C．$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.　　D．$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6．【答案】D

【解析】由$\boldsymbol{A}^*=-2\boldsymbol{A}$，两边同时左乘$\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{AA}^*=-2\boldsymbol{A}^2 \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{E}.$$

排除 B，C.

由$\boldsymbol{A}^*=-2\boldsymbol{A}$两边同时取行列式，得到$\left|\boldsymbol{A}^*\right|=|-2\boldsymbol{A}|$.

又$\left|\boldsymbol{A}^*\right|=|\boldsymbol{A}|^{3-1}=|\boldsymbol{A}|^2=(-2)^3|\boldsymbol{A}|=-8|\boldsymbol{A}|$，且$|\boldsymbol{A}|^2+8|\boldsymbol{A}|=0$，

故$|\boldsymbol{A}|(|\boldsymbol{A}|+8)=0$，解得$|\boldsymbol{A}|=0$或$|\boldsymbol{A}|=-8$.

所以$|\boldsymbol{A}|^2=64$, 排除 A，故选 D.

7．设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$，且$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$，则下列结论错误的是

A．$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^3=\boldsymbol{O}$.

B. $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 只有零特征值.

C. $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 不能都是对角矩阵.

D. $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 只有一个线性无关的特征向量.

7.【答案】D

【解析】
$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2,$$

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{O},$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{O}\ ,$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O},$$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O},$$

$$-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{O},$$

故 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{O}$.

A 选项：$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^3=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{O}$ 成立；

B 选项：由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{O}$ 可得，$f\left((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2\right)=\boldsymbol{O}$，故 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2$ 只有零特征值.设 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 的特征值为入，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2$ 的特征值 $\lambda^2=0$，故 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 也只有零特征值；

C 选项：若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是对角矩阵，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 也为对角阵，而对角矩阵的平方为零；当且仅当自身为零矩阵（对角元平方为零，则对角元为零），但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$.故 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 不能都是对角阵；

D 选项：设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{O}$，但 $\boldsymbol{C}$ 的线性无关特征向量个数不一定为 1

举特例为 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，满足 $\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{O}$.

而 $\boldsymbol{C}$ 有 2 个线性无关的特征向量，故选 D.

8．设随机变量 $X$ 和 $Y$ 独立分布，$X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ 则

$P\{XY\le 1\}=$

A．$\dfrac{3}{4}$．　　　　B．$\dfrac{1}{2}$．

C．$\dfrac{1}{3}$．　　　　D．$\dfrac{1}{6}$．

8．【答案】B

【解析】由于 $X$ 与 $Y$ 独立，所以 $X$ 与 $Y$ 的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2(1+y)^2}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以 $P\{XY\le 1\}=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{(1+y)^2}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2}\bigg|_0^{+\infty}=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}.$$

选 B.

9．设随机变量 $X\sim N(0,1)$，随机变量 $Y\sim B\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$，且 $X$ 与 $Y$ 独立，则 $XY$ 与 $X+Y$ 的相关系数为

A．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C．$\dfrac{2}{3}$　　　　D．$\dfrac{1}{2}$

9．【答案】C

【解析】$\mathrm{Cov}(XY,X+Y)=\mathrm{Cov}(XY,X)+\mathrm{Cov}(XY,Y)$

$$=E\left(X^2Y\right)-E(XY)\cdot EX+E\left(XY^2\right)-E(XY)EY$$

$$=\left[E\left(X^{2}\right)-(EX)^{2}\right]EY+EX\left(E\left(Y^{2}\right)-(EY)^{2}\right)$$

$$=DXEY+EXDY.$$

由于 $EX=0,DX=1,EY=1,DY=\frac{1}{2}$，则 $\operatorname{Cov}(XY,X+Y)=1\times1+0\times\frac{1}{2}=1$.

又因为

$$D(XY)=E(XY)^{2}-[E(XY)]^{2}=E\left(X^{2}\right)E\left(Y^{2}\right)-(EX)^{2}(EY)^{2}=1\times\frac{3}{2}-0=\frac{3}{2},$$

$$D(X+Y)=DX+DY=\frac{3}{2},$$

所以 $XY$ 与 $X+Y$ 的相关系数为 $\rho=\dfrac{1\times1+0\times\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{3}$.

选 C.

10．设随机变量 $X$ 的概率分布为 $P\left\{X=k\right\}=\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k}}\left(k=1,2,\cdots\right)$，则对于正整数 $m,n$，有

A. $P\left\{X>m+n\middle|X>m\right\}=P\left\{X>m\right\}$.

B. $P\left\{X>m+n\middle|X>m\right\}=P\left\{X>n\right\}$.

C. $P\left\{X>m+n\middle|X>m\right\}>P\left\{X>m\right\}$.

D. $P\left\{X>m+n\middle|X>m\right\}>P\left\{X>n\right\}$.

10．【答案】D

【解析】$P\{X>m\}=\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}P\left\{X=k\right\}=\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k}}\right)=\dfrac{\frac{1}{2^{m+2}}}{1-\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{3^{m+1}}}{1-\frac{1}{3}}$

$$=\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{3^{m}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{m}}+\frac{1}{3^{m}}\right).$$

$$P\left\{X>m+n \middle| X>m\right\}=\frac{P\{X>m+n\}}{P\left\{X>m\right\}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{m+n}}+\frac{1}{3^{m+n}}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{m}}+\frac{1}{3^{m}}\right)}\xlongequal{\left(\text{同乘}6^{m}\right)}\frac{\frac{3^m}{2^n}+\frac{2^m}{3^n}}{3^m+2^m}.$$

而$P\{X>n\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$，所以

$$P\left\{X>m+n \middle| X>m\right\}-P\{X>n)=\frac{\frac{3^m}{2^n}+\frac{2^m}{3^n}}{3^m+2^m}-\frac{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}}{2}(\text{通分})$$

$$=\frac{2\left(\frac{3^m}{2^n}+\frac{2^m}{3^n}\right)-\frac{3^m+2^m}{2^n}-\frac{3^m+2^m}{3^n}}{2\left(3^m+2^m\right)}=\frac{\frac{3^m}{2^n}+\frac{2^m}{3^n}-\frac{2^m}{2^n}-\frac{3^m}{3^n}}{2\left(3^m+2^m\right)}$$

$$=\frac{\left(3^m-2^m\right)\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)}{2\left(3^m+2^m\right)}>0,$$

选择 D.

**二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.**

11．$\int_0^1 x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=$________.

11.【答案】0

【解析】$\int_0^1 x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x \xlongequal[x=t+\frac{1}{2}]{\text{令}x-\frac{1}{2}=t} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t=$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(t^2-\frac{1}{4}\right)t\mathrm{d}t=0.$$

12．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)=$________.

12.【答案】1

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x\cdot\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\sin x}{x\sin x\tan x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[x+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]\left[1+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right]-\left[x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)x^3+o\left(x^3\right)}{x^3}=1.$$

13．设 $p$ 为常数，若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p\left(x+1\right)}\mathrm{d}x$ 收敛，则 $p$ 的取值范围是________.

13.【答案】$0<p<2$

【解析】$I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

对于 $I_1$，当 $x\to0^+$ 时，$\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}\sim\frac{x}{x^p}=\frac{1}{x^{p-1}}$，

故当 $p-1<1$ 时收敛，即 $p<2$；

对于 $I_2$，当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}\sim\frac{\frac{\pi}{2}}{x^{p+1}}$，

故当 $p+1>1$ 时收敛，即 $p>0$.

综上，$I$ 收敛时，$0<p<2$.

14．微分方程 $y''-2y'=\mathrm{e}^x$ 满足条件 $y\left(0\right)=1$，$y'\left(0\right)=1$ 的解为 $y=$________.

14.【答案】$y=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1$

【解析】由 $y''-2y'=\mathrm{e}^x$ 的齐次方程为 $y''-2y'=0$，知特征方程为 $r^2-2r=0$，故

$r_1=0$，$r_2=2$，故齐次通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2$.

由自由项 $f(x)=\mathrm{e}^x$，故可设特解为 $y^*=A\mathrm{e}^x$，则 $\left(y^*\right)'=A\mathrm{e}^x$，$\left(y^*\right)''=A\mathrm{e}^x$.

代入方程中得 $A\mathrm{e}^x-2A\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x$，故 $A=-1$，即非齐次通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2-\mathrm{e}^x$.

又由初始条件知 $y(0)=1$，$y'(0)=1$.故 $\begin{cases}C_1+C_2-1=1,\\2C_1-1=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}C_1=1,\\C_2=1.\end{cases}$ 故

$$y=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1.$$

15. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & b & -1\\ a+2 & 3 & -3a\end{pmatrix}$.若二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}$ 的规范形为 $y_1^2$，则 $a+b=$

15.【答案】2

【解析】由题可知，二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 $y_1^2$，因此矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的秩为 1，故 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & b & -1\\ a+2 & 3 & -3a\end{pmatrix}$ 的两行对应成比例，

$$\frac{1}{a+2}=\frac{b}{3}=-\frac{1}{3a},$$

即 $\begin{cases}3=(a+2)b,\\-3ab=-3.\end{cases}$ 联立解得 $a=1,b=1$. 故 $a+b=2$.

16. 设随机变量 $X$ 服从参数为 1 的泊松分布，随机变量 $Y$ 服从参数为 3 的泊松分布，$X$ 与 $Y-X$ 相互独立，则 $E(XY)=$________.

16.【答案】4

【解析】由 $X$ 与 $Y-X$ 独立，可知二者不相关，即

$$\operatorname{Cov}(X,Y-X)=\operatorname{Cov}(X,Y)-DX=0.$$

也即 $E(XY)-EX\cdot EY-DX=0$.

所以 $E(XY)=EX\cdot EY+DX=1\times3+1=4$.

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\dfrac{1}{(2-x)^2}-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，将 $f(x)$ 展开成 $x$ 的幂级数.

17.【解】令 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$ ，对原方程 $f(x)=\dfrac{1}{(2-x)^2}-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

两边同时进行从 0 到 1 积分，则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(2-x)^2}\mathrm{d}x-\int_0^1 A\mathrm{d}x,\ A=\int_0^1\frac{1}{(2-x)^2}\mathrm{d}x-A\text{，}$$

其中 $\int_0^1\dfrac{1}{(2-x)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$. 故 $A=\dfrac{1}{4}$.

又因为 $\dfrac{1}{(2-x)^2}=\left(\dfrac{1}{2-x}\right)'=\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}\right)'=\left[\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\right]'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\dfrac{x^{n-1}}{2^{n+1}}$，故

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{x^{n-1}}{2^{n+1}}-\frac{1}{4},|x|<2\ .$$

18．（本题满分 12 分）

已知函数 $g(x)$ 连续.设 $f(x)=\int_0^{x^2}g(xt)\mathrm{d}t$，求 $f'(x)$ 的表达式，并判断 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

18.【解】当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\int_0^{x^2}g(xt)\mathrm{d}t\overset{u=xt}{=\!=\!=}\int_0^{x^3}g(u)\dfrac{1}{x}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\int_0^{x^3}g(u)\mathrm{d}u$.

对 $f(x)$ 求导得，

$$f'(x)=\frac{g\left(x^3\right)3x^3-\int_0^{x^3}g(u)\mathrm{d}u}{x^2}=3xg\left(x^3\right)-\frac{\int_0^{x^3}g(u)\mathrm{d}u}{x^2}.$$

在 $x=0$ 处，由定义式可得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}g(u)\mathrm{d}u}{x^2}=0.$$

故 $f'(x)=\begin{cases}3xg\left(x^3\right)-\dfrac{\int_0^{x^3}g(u)\mathrm{d}u}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

又 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[3xg\left(x^3\right)-\dfrac{\int_0^{x^3}g(u)\mathrm{d}u}{x^2}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}3xg\left(x^3\right)-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}g(u)\mathrm{d}u}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{3x^2g(x^3)}{2x}=0,$$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

19.（本题满分 10 分）

求函数 $f\left(x,y\right)=\left(2x^2-y^2\right)\mathrm{e}^x$ 的极值.

19.【解】由题可知，$f_x'=4x\mathrm{e}^x+\left(2x^2-y^2\right)\mathrm{e}^x, f_y'=-2y\mathrm{e}^x$.

令 $\begin{cases}f_x'=0,\\ f_y'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2,\\ y=0.\end{cases}$

又 $A=f_{xx}''=\mathrm{e}^x\left(2x^2+8x+4-y^2\right), B=f_{xy}''=-2y\mathrm{e}^y, C=f_{yy}''=-2\mathrm{e}^x$,

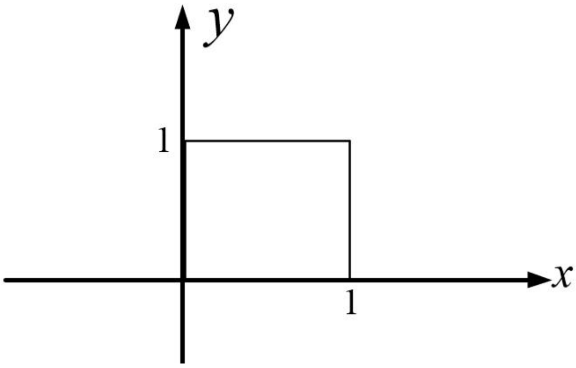
故 $AC-B^2\big|_{(0,0)}=-8<0, AC-B^2\big|_{(-2,0)}=8\mathrm{e}^{-4}>0$ 且 $A_{(-2,0)}=-4\mathrm{e}^{-2}<0$,

则 $(0,0)$ 为非极值点，$(-2,0)$ 为极大值点且极大值 $f(-2,0)=\dfrac{8}{\mathrm{e}^2}$.

20.（本题满分 12 分）

设平面区域 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D\dfrac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

20.【解】如图所示，




$$\text{原式}=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\left(1+x^2+y^2\right)$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2}(-2)\cdot\left(1+x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^1 \mathrm{d}x=\int_0^1\left[\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1-\ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\ln(1+\sqrt{2})-\ln(1+\sqrt{3})+\ln\sqrt{2}=\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}\right).$$

21.（本题满分 12 分）

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，记

$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)$，$\boldsymbol{G}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right)$.

（1）证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组；

（2）求矩阵 $\boldsymbol{H}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{GH}$，并求 $\boldsymbol{A}^{10}$.

21.（1）【证明】$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&1\\-1&0&1&-1\\-1&-2&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

$r(\boldsymbol{A})=2$ 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

又 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组.

（2）【解】$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\right)_{1\times4}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right)_{1\times2}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}_{2\times4}$，

$$\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{GHGH}\cdots\boldsymbol{GH}=\boldsymbol{GD}^9\boldsymbol{H}，$$

其中 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}_{2\times4}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&-2\end{pmatrix}_{4\times2}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}_{2\times2}$.

又 $\boldsymbol{D}^2=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{D}^3=\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}$，由此可推出 $\boldsymbol{D}^9=\begin{pmatrix}1&-9\\0&1\end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{GD}^9\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1&8&-9&9\\0&-1&-1&1\\-1&9&10&-10\\-1&7&8&-8\end{pmatrix}.$$

22.（本题满分 12 分）

假设某种元件的寿命服从指数分布，其均值 $\theta$ 是未知参数.为估计 $\theta$，取 $n$ 个这种元件同时做寿命试验，试验到出现 $k\left(1\le k\le n\right)$ 个元件失效时停止.

（1）若 $k=1$，失效元件的寿命记为 $T$，（i）求 $T$ 的概率密度;（ii）确定 $a$，使得 $\hat{\theta}=aT$ 是 $\theta$ 的无偏估计，并求 $D\left(\hat{\theta}\right)$；

（2）已知 $k$ 个失效元件的寿命值分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_k$，且 $t_1\le t_2\le\cdots\le t_k$，似然函数为 $L\left(\theta\right)=\dfrac{1}{\theta^k}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\left[\sum\limits_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]}$，求 $\theta$ 的最大似然估计值.

22.【解】（1）（i）设元件的寿命分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，则每个样本均服从参数 $\lambda=\dfrac{1}{\theta}$ 的

指数分布，即

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases} f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

当$k=1$时，$T=\min\left\{X_1,X_2,\cdots,X_n\right\}$，设$T$的分布函数为$F_T\left(t\right)$，则

$$F_T(t)=P\{T\leq t\}=1-P\{\min\{X_1,\ldots,X_n\}>t\}=1-\prod_{i=1}^{n}P\{X_i>t\}=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{n}{\theta}t}, & t\geq 0.\end{cases}$$

$T$的概率密度为

$$f_T(t)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{n}{\theta}t}, & t>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（ii） 由（i）可知，$T\sim E\left(\frac{n}{\theta}\right)$,

所以$E\left(T\right)=\frac{\theta}{n},D\left(T\right)=\frac{\theta^2}{n^2}$，故$E(\hat{\theta})=a\cdot\frac{\theta}{n}$.

当$a=n$时，$\hat{\theta}=aT$为$\theta$的无偏估计量.

$$D(\hat{\theta})=D(nT)=n^2DT=n^2\cdot\frac{\theta^2}{n^2}=\theta^2.$$

（2）似然函数为

$$L(\theta)=\frac{1}{\theta^k}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]},$$

$$\ln L(\theta)=-k\ln\theta-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right],$$

令$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{k}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]=0$，解得

$$\theta=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}t_i+\frac{n-k}{k}t_k,$$

即$\theta$的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}t_i+\frac{n-k}{k}t_k.$$