2026 考研数学（二）真题

试卷及解析

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．已知当 $x \to 0$ 时，$ax^2 + bx + \arcsin x$ 与 $\sqrt[3]{1+x^2} - 1$ 是等价无穷小，则

A．$a = \dfrac{1}{3}, b = -1$．　　B．$a = \dfrac{1}{3}, b = 1$．

C．$a = \dfrac{2}{3}, b = -1$．　　D．$a = \dfrac{2}{3}, b = 1$．

1．【答案】A

【解析】由题意得 $x \to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+x^2} - 1 \sim \dfrac{1}{3}x^2$，

$$ax^2 + bx + \arcsin x = ax^2 + bx + x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^2\right) = (b+1)x + ax^2 + o\left(x^2\right).$$

由于 $ax^2 + bx + \arcsin x$ 与 $\sqrt[3]{1+x^2} - 1$ 为等价无穷小，则

$$(b+1)x + ax^2 + o\left(x^2\right) \sim \frac{1}{3}x^2.$$

故 $\begin{cases} b+1=0, \\ a=\dfrac{1}{3}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=-1, \\ a=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$ 故选 A.

2．设 $y_1(x), y_2(x)$ 是某 2 阶非齐次线性微分方程的两个特解，若常数 λ, μ 使得 $2\lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$ 是该方程的解，$\lambda y_1(x) - 2\mu y_2(x)$ 是该方程对应的齐次方程的解，则

A．$\lambda = \dfrac{1}{5}, \mu = \dfrac{2}{5}$．　　B．$\lambda = \dfrac{2}{5}, \mu = \dfrac{1}{5}$．

C．$\lambda = \dfrac{1}{4}, \mu = \dfrac{1}{2}$．　　D．$\lambda = \dfrac{1}{2}, \mu = \dfrac{1}{4}$．

2．【答案】A

【解析】由线性微分方程解的叠加原理可得，要使 $2\lambda y_1(x)+\mu y_2(x)$ 为非齐次解，系数必须满足 $2\lambda+\mu=1$；要使 $\lambda y_1(x)-2\mu y_2(x)$ 为齐次方程的解，要求 $\lambda-2\mu=0$.

故 $\begin{cases}2\lambda+\mu=1,\\ \lambda=2\mu,\end{cases}$ 解得 $\mu=\dfrac{1}{5},\lambda=\dfrac{2}{5}$. 故选 A.

3．设函数 $z=z\left(x，y\right)$ 由方程 $x-az=\mathrm{e}^{y+az}$ （a 是非零常数）确定，则

A. $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$.

B. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$.

C. $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{a}$.

D. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{a}$.

3．【答案】A

【解析】（法一）由微分形式不变性得 $\mathrm{d}x-a\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{y+az}(\mathrm{d}y+a\mathrm{d}z)$，

整理得：$\left(a\mathrm{e}^{y+at}+a\right)\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\left(\mathrm{e}^{y+az}\right)\mathrm{d}y$，故 $\mathrm{d}z=\dfrac{1}{a}\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^{y+az}+1}\mathrm{d}x+\dfrac{-\mathrm{e}^{y+az}}{\mathrm{e}^{y+az}+1}\mathrm{d}y\right]$.

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{y+az}+1},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{-\mathrm{e}^{y+az}}{\mathrm{e}^{y+az}+1}\right)$.

显然：$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$，选 A.

（法二）构造 $F(x,y,z)=x-az-\mathrm{e}^{y+az}$，

由 $\begin{cases}F_x'=1,\\ F_y'=-\mathrm{e}^{y+az},\\ F_z'=-a-\mathrm{e}^{y+az}\cdot a,\end{cases}$ 故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{1}{-a\left[1+\mathrm{e}^{y+az}\right]}=\frac{1}{a\left[1+\mathrm{e}^{y+az}\right]},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{-\mathrm{e}^{y+az}}{-a\left[1+\mathrm{e}^{y+az}\right]}=-\frac{\mathrm{e}^{y+az}}{a\left[1+\mathrm{e}^{y+az}\right]}.$$

故$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$，选 A.

4．设线密度为 1 的细直棒的两个端点分别位于点$(-1,0)$和点$(1,0)$处，质量为m的质点位于点$(0,1)$处，G为引力常量，则该细直棒对该质点的引力大小为

A．$\int_0^1 \dfrac{2Gmx}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x.$ B．$\int_0^1 \dfrac{2Gm}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x.$

C．$\int_0^1 \dfrac{2Gmx}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$ D．$\int_0^1 \dfrac{2Gm}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$

4.【答案】D

【解析】细直棒位于x轴上$[-1,1]$，取棒上任意微元，微元位置x，$x\in(-1,1)$，长度为$\mathrm{d}x$.

由万有引力定律，两质点，（微元与质点）的距离为$r=\sqrt{x^2+1^2}=\sqrt{1+x^2}$.

引力微元$\mathrm{d}F$的大小为$\mathrm{d}F=G\cdot\dfrac{md_{m棒}}{r^2}=G\cdot\dfrac{m\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)}$.

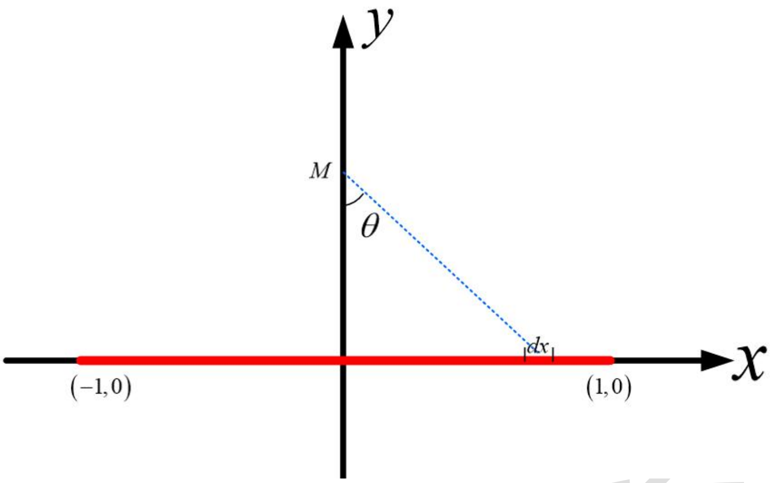
X方向：由于棒关于y轴对称（x与$-x$处的微元，x分量大小相等、方向相反），故引力的水平分力为 0.

Y方向：引力微元的y分量为$\mathrm{d}F_y=\mathrm{d}F\cos\theta$，其中 $\cos\theta=\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$（$\theta$是引力方向与$y$轴的夹角）.

因此，Y方向的引力微元为：$\mathrm{d}F_y=G\dfrac{m\mathrm{d}x}{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{Gm\mathrm{d}y}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$.

最后积分计算总引力，利用对称性，$[-1,0]$与$[0,1]$的引力贡献相同。

因此总引力大小为$F=2\int_0^1\dfrac{Gm}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$，故选 D.



5．设函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-1,1\right]$ 上有定义，则

A．当 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,0\right)$ 单调递减，在 $\left(0,1\right)$ 单调递增时，$f\left(0\right)$ 是极小值.

B．当 $f\left(0\right)$ 是极小值时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,0\right)$ 单调递减，在 $\left(0,1\right)$ 单调递增.

C．当 $f\left(x\right)$ 的图形在 $\left[-1,1\right]$ 是凹的时，$\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x\text{-}1}$ 在 $\left[-1,1\right)$ 单调递增.

D．当 $\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x\text{-}1}$ 在 $\left[-1,1\right)$ 单调递增时，$f\left(x\right)$ 的图形在 $\left[-1,1\right]$ 是凹的.

5.【答案】C

【解析】对 A 选项：取 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 知 $f(0)$ 不是极小值，排除；

对 B 选项：取 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 知 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单增，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单减，但仍满足 $f(0)$ 是极小值，排除；

对 C 选项：若 $f(x)$ 的图形在 $[-1,1]$ 上是凹的（即凸函数，二阶导数非负或满足凸性定义），则对任意 $x_1<x_2<1$，由凸性有 $\dfrac{f(1)-f\left(x_1\right)}{1-x_1}\leq\dfrac{f(1)-f\left(x_2\right)}{1-x_2}$,

即 $\dfrac{f\left(x_1\right)-f(1)}{x_1-1} \le \dfrac{f\left(x_2\right)-f(1)}{x_2-1}$，故差商 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1)$ 单调递增。因此 C 正确。

对 D 选项，取 $f\left(x\right)=\left|x\right|$ 时，$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 单增，但 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 不是凹曲线，排除.

6．已知函数 $f\left(x\right)=\int_1^{x^3}\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，$f$ 的反函数为 g，则

A．$g\left(0\right)=1, g'\left(0\right)=\dfrac{3}{2}\mathrm{e}.$

B．$g\left(0\right)=1, g'\left(0\right)=\dfrac{2}{3\mathrm{e}}.$

C．$g\left(1\right)=0, g'\left(1\right)=\dfrac{3}{2}\mathrm{e}.$

D．$g\left(1\right)=0, g'\left(1\right)=\dfrac{2}{3\mathrm{e}}.$

6.【答案】B

【解析】由题知，当 $x=1$ 时，$f(1)=0$，故 $g(0)=1$.

又 $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_1^{x^3}\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^2}\mathrm{d}t}{x-1}=\dfrac{3\mathrm{e}}{2}$,

由 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$ 知 $f'(1)=\dfrac{1}{g'(0)}$，故 $g'(0)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{2}{3\mathrm{e}}$.选 B.

7．设函数 $f\left(x,y\right)$ 在区域 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|0\le x\le1,0\le y\le1\right\}$ 上连续，且 $f\left(x,y\right)=f\left(y,x\right)$，则 $\iint\limits_D f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

A．$2\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=n+1-i}^{n}f\left(\dfrac{i}{n},\dfrac{j}{n}\right)\dfrac{1}{n^2}.$

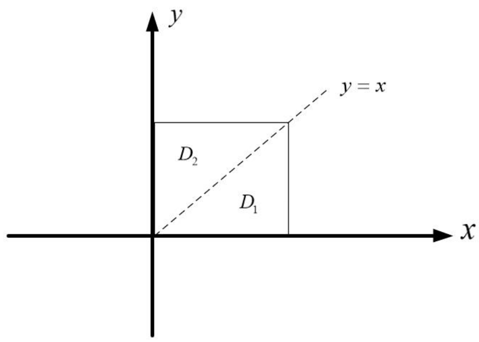
B．$\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i}^{n}f\left(\dfrac{i}{n},\dfrac{j}{n}\right)\dfrac{1}{n^2}.$

C．$2\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{2n}\sum\limits_{j=1}^{2n+1-i}f\left(\dfrac{i}{2n},\dfrac{j}{2n}\right)\dfrac{1}{n^2}.$

D．$\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{2n}\sum\limits_{j=1}^{i}f\left(\dfrac{i}{2n},\dfrac{j}{2n}\right)\dfrac{1}{n^2}.$

7.【答案】D

【解析】由题知，对应的图形如下图所示：



$$\iint\limits_{D} f(x,y)=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1} f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y.$$

对 D，令 $\begin{cases}\dfrac{i}{2n}\to x,\\ \left(\dfrac{1}{2n},\dfrac{2n}{2n}\right)\to(0,1),\\ \dfrac{1}{2n}\to \mathrm{d}x,\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{j}{2n}\to y,\\ \left(\dfrac{1}{2n},\dfrac{i}{2n}\right)\to(0,x),\\ \dfrac{1}{2n}\to \mathrm{d}y,\end{cases}$

故 $\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{2n}\sum\limits_{j=1}^{i} f\left(\dfrac{i}{2n},\dfrac{j}{2n}\right)\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}\sum\limits_{j=1}^{i} f\left(\dfrac{i}{2n},\dfrac{j}{2n}\right)$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y\ .$$

选 D.

对 A，对应积分形式为 $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$.

对 B，对应积分形式为 $\dfrac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x,y)\mathrm{d}y$.

对 C，对应积分形式为 $8\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

8．单位矩阵经过若干次互换两行得到的矩阵称为置换矩阵.设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶置换矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

A . $\boldsymbol{A}^*$ 为置换矩阵.　　　　B . $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为置换矩阵.

C . $A^{-1}=A^{*}$.　　　　D . $A^{-1}=-A^{*}$.

8.【答案】B

【解析】设 $A=E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}\cdots E_{i_nj_n}$，

由于 $\left(E_{ij}\right)^{\mathrm{T}}=E_{ij},\left(E_{ij}\right)^{-1}=E_{ij}$，故

$A^{-1}=\left(E_{i_nj_n}\right)^{-1}\cdots\left(E_{i_2j_2}\right)^{-1}\cdot\left(E_{i_1j_1}\right)^{-1}=E_{i_nj_n}\cdots E_{i_2j_2}E_{i_1j_1}$，仍为置换矩阵，故选 B.

$A^{*}=|A|\cdot A^{-1}=(-1)^{n}A^{-1}$，$n$ 为偶数时，为置换矩阵；n 为奇数时，不为置换矩阵，故 A，C，D 错.

9．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&3\\1&1&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\1&1\\a&b\end{pmatrix}$,若存在矩阵 B 满足 $AB=C$，则

A. $a=-1,b=-1.$　　　　B. $a=2,b=2.$

C. $a=-1,b=2.$　　　　D. $a=2,b=-1.$

9.【答案】A

【解析】设 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right),C=\left(r_1,r_2\right)$

由 $AB=C$ 得，B 的列向量为 $Ax=r_1,Ax=r_2$ 的解

由 $Ax=r_1$ 有解得 $r(A)=r\left(A,r_1\right)$，

故 $\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&-1\\0&0&1&1\\0&0&-2&\mathrm{a}-1\end{pmatrix}$ 的最后两行成比例，即 $\dfrac{1}{-2}=\dfrac{1}{a-1}$，解得 $a=-1$.

同理，由 $Ax=r_2$ 有解得 $r(A)=r\left(A,r_2\right)$ 故最后两行成比例 $\dfrac{1}{-2}=\dfrac{1}{b-1}$，解得 $b=-1$.

故选 A.

10．设 3 阶矩阵 A，B 满足 $AB+BA=A^2+B^2$，且 $A\neq B$，则下列结论错误的是

A. $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^3=\boldsymbol{O}$.

B. $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 只有零特征值.

C. $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 不能都是对角矩阵.

D. $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 只有一个线性无关的特征向量.

10.【答案】D

【解析】

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2,$$

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{O},$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{O},$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O},$$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O},$$

$$-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{O},$$

故 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{O}$.

A 选项：$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^3=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{O}$ 成立；

B 选项：由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{O}$ 可得，$f\left((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2\right)=\boldsymbol{O}$，故 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2$ 只有零特征值.设 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 的特征值为入，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2$ 的特征值 $\lambda^2=0$，故 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 也只有零特征值；

C 选项：若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是对角矩阵，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 也为对角阵，而对角矩阵的平方为零；当且仅当自身为零矩阵（对角元平方为零则对角元为零），但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$.故 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 不能都是对角阵；

D 选项：设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{O}$，但 $\boldsymbol{C}$ 的线性无关特征向量个数不一定为 1，

举特例为 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，满足 $\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{O}$.

而 $\boldsymbol{C}$ 有 2 个线性无关的特征向量，故选 D.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 设 p 为常数，若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}\mathrm{d}x$ 收敛，则 p 的取值范围是________.

11.【答案】$0<p<2$

【解析】$I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

对于 I_1，当 $x\to 0^+$ 时，$\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}\sim\frac{x}{x^p}=\frac{1}{x^{p-1}}$，

故当 $p-1<1$ 时收敛，即 $p<2$；

对于 I_2，当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{\arctan x}{x^p(x+1)}\sim\frac{\frac{\pi}{2}}{x^{p+1}}$，

故当 $p+1>1$ 时收敛，即 $p>0$.

综上，I 收敛时，$0<p<2$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x\sin x}\right)=$________.

12.【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x\sin x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]-\left[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

13．曲线 $x^2+2\sqrt{3}xy+y^2=1$ 在点 $(0,1)$ 处的曲率半径为_______.

13.【答案】4

【解析】由 $x^2+2\sqrt{3}xy+y^2=1$，求导得

$$2x+2\sqrt{3}y+2\sqrt{3}xy'+2yy'=0 \text{——①}$$

代入 $x=0,y=1$ 知 $y'=-\sqrt{3}$.

对①继续求导得：

$$2+2\sqrt{3}y'+2\sqrt{3}y'+2\sqrt{3}xy''+2\left(y'\right)^2+2yy''=0.$$

代入 $x=0,y=1,y'=-\sqrt{3}$ 得 $y''=2$.

由曲率公式知 $k=\dfrac{|y''|}{\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{4}$，故曲率半径为 $R=\dfrac{1}{k}=4$.

14．已知函数 $f(x,y)$ 可微，且 $\mathrm{d}f(0,0)=\pi\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y$. 记 $g(x)=f(\ln x,\sin\pi x)$，则 $g'(1)=$_______.

14.【答案】-2π

【解析】由 $\mathrm{d}f(0,0)=\pi\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y$ 知，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\pi,\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=3.$

故 $g'(x)=f_1'\cdot\dfrac{1}{x}+f_2'\pi\cos\pi x$. 因此

$$g'(1)=\pi\cdot 1+3\cdot\pi\cos\pi=-2\pi.$$

15．函数 $f(x)=\ln(2+x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均值为________.

15.【答案】$3\ln 2-1$

【解析】$f(x)=\dfrac{1}{2}\int_0^2 \ln\left(2+x\right)\mathrm{d}x \xlongequal[x=\mathrm{e}^x-2]{令t=\ln\left(2+x\right)} \dfrac{1}{2}\int_{\ln 2}^{2\ln 2} t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\left(t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t\right)\Big|_{\ln 2}^{2\ln 2}=\frac{1}{2}\left(6\ln 2-2\right)=3\ln 2-1.$$

16．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & b & -1\\ a+2 & 3 & -3a\end{pmatrix}$.若二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}$ 的规范形为 y_1^2，则 $a+b=$

16.【答案】2

【解析】由题可知，二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 y_1^2，因此矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的秩为 1，故 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & b & -1\\ a+2 & 3 & -3a\end{pmatrix}$ 的两行对应成比例，

$$\frac{1}{a+2}=\frac{b}{3}=\frac{-1}{3a},$$

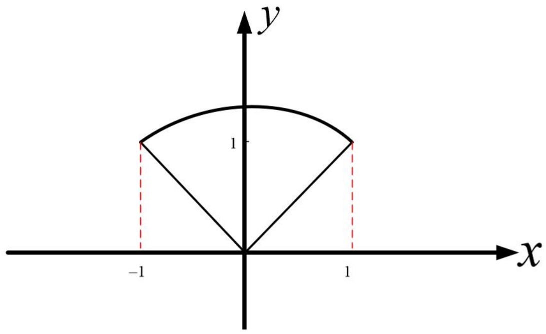
即 $\begin{cases}3=(a+2)b,\\ -3ab=-3.\end{cases}$ 联立解得 $a=1,b=1$. 故 $a+b=2$.

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本题满分 10 分）

计算 $I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} y\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$.

17.【解】如图所示，



令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\sin\theta\sin r\cdot r\mathrm{d}r=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^2\cdot\sin r\mathrm{d}r\ ,$$

其中 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=-\cos\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}=\sqrt{2},\int_0^{\sqrt{2}} r^2\sin r\mathrm{d}r=\int_0^{\sqrt{2}} r^2\mathrm{d}(-\cos r)$

$$=-r^2\cos r\Big|_0^{\sqrt{2}}+\int_0^{\sqrt{2}}2r\cdot\cos r\mathrm{d}r=2\sqrt{2}\sin\sqrt{2}-2.$$

故 $I=\sqrt{2}\cdot(2\sqrt{2}\sin\sqrt{2}-2)=4\sin\sqrt{2}-2\sqrt{2}.$

18.（本题满分 12 分）

已知函数 $g(x)$ 连续.设 $f(x)=\int_0^{x^2} g(xt)\mathrm{d}t$，求 $f'(x)$ 的表达式，并判断 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

18.【解】当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\int_0^{x^2} g(xt)\mathrm{d}t\overset{u=xt}{=\!=}\int_0^{x^3} g(u)\frac{1}{x}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\int_0^{x^3} g(u)\mathrm{d}u.$

对 $f(x)$ 求导得，

$$f'(x)=\frac{g\left(x^3\right)3x^3-\int_0^{x^3} g(u)\mathrm{d}u}{x^2}=3xg\left(x^3\right)-\frac{\int_0^{x^3} g(u)\mathrm{d}u}{x^2}.$$

在 $x=0$ 处，由定义式可得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3} g(u)\mathrm{d}u}{x^2}=0.$$

故 $f'(x)=\begin{cases}3xg\left(x^3\right)-\dfrac{\int_0^{x^3} g(u)\mathrm{d}u}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

又 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[3xg\left(x^3\right)-\dfrac{\int_0^{x^3} g(u)\mathrm{d}u}{x^2}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}3xg\left(x^3\right)-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}g(u)\mathrm{d}u}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{3x^2g(x^3)}{2x}=0\text{ ，}$$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

19.（本题满分 10 分）

求函数 $f\left(x,y\right)=\left(2x^2-y^2\right)\mathrm{e}^x$ 的极值.

19.【解】由题可知，$f_x'=4x\mathrm{e}^x+\left(2x^2-y^2\right)\mathrm{e}^x, f_y'=-2y\mathrm{e}^x$.

令 $\begin{cases}f_x'=0\\f_y'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2,\\y=0.\end{cases}$

又 $A=f_{xx}''=\mathrm{e}^x\left(2x^2+8x+4-y^2\right), B=f_{xy}''=-2y\mathrm{e}^y, C=f_{yy}''=-2\mathrm{e}^x$,

故 $AC-B^2\big|_{(0,0)}=-8<0, AC-B^2\big|_{(-2,0)}=8\mathrm{e}^{-4}>0$ 且 $A_{(-2,0)}=-4\mathrm{e}^{-2}<0$, 则 $(0,0)$ 为非极值点，$(-2,0)$ 为极大值点且极大值 $f(-2,0)=\dfrac{8}{\mathrm{e}^2}$.

20.（本题满分 12 分）

已知 $M\left(x_0,y_0\right)$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}\left(x\ge 0\right)$ 的拐点，O 为坐标原点.记 D 是第一象限中以曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}\left(x\ge x_0\right)$，线段 OM 及 x 正半轴为边界的无界区域，求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

20.【解】由题可知 $y'=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}, y''=\dfrac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$.

令 $y''=0$ 且 $x_0>0$，解得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\\y_0=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

OM 直线段为 $y=\dfrac{3}{4}\sqrt{3}x, x\in\left[0,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$,

则旋转体的体积 $V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\pi\cdot\left(\frac{3}{4}\sqrt{3}x\right)^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty}\pi\cdot\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x$，

其中

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\pi\left(\frac{3}{4}\sqrt{3}x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{27}{16}\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}x^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{16}\pi,$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty}\pi\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x.$$

令 $x=\tan\theta$，得

$$\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^2}{6}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi\right)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{16}\pi.$$

21.（本题满分 12 分）

求微分方程 $x^2y''-2xy'-\left(y'\right)^2=0\left(x>2\right)$ 满足条件 $y\big|_{x=3}=\frac{1}{2},y'\big|_{x=3}=-9$ 的解.

21.【解】此方程属于二阶可降阶中的不显含 y 的类型.

令 $p=y',y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$，则代入原方程可得，$x^2p'-2xp-p^2=0$，

整理得 $p'-\frac{2}{x}p=x^{-2}p^2$.

令 $z=p^{-1},z'=-p^{-2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-p^{-2}p'$，代入上式得 $z'+\frac{2}{x}z=-x^{-2}$.

故 $z=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\cdot\left(-x^{-2}\right)\mathrm{d}x+C\right)=-\frac{1}{x}+\frac{C}{x^2}$.

又 $z\big|_{x=3}=\frac{1}{y'(3)}=-\frac{1}{9}$ 代入上式：$C=2$.

故 $\frac{1}{y'}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2},y'=y^{\frac{x^2}{2-x}}$，则

$$y=-\frac{1}{2}x^2-2x-4\ln\left(x-2\right)+C.$$

又 $y|_{x=3}=\dfrac{1}{2}$ 代入上式，$C=11$.

故 $y=-\dfrac{1}{2}x^2-2x-4\ln(x-2)+11$.

22．（本题满分 12 分）

已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$, 记

$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

（1）证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组；

（2）求矩阵 $\boldsymbol{H}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{GH}$，并求 $\boldsymbol{A}^{10}$.

22.（1）【证明】$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&1\\-1&0&1&-1\\-1&-2&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

$r(\boldsymbol{A})=2$ 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

又 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组.

（2）【解】$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)_{1\times4}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)_{1\times2}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}_{2\times4}$,

$$\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{GHGH}\cdots\boldsymbol{GH}=\boldsymbol{GD}^9\boldsymbol{H},$$

其中 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}_{2\times4}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&-2\end{pmatrix}_{4\times2}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}_{2\times2}$.

又 $\boldsymbol{D}^2=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}^3=\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}$, 由此可推出 $\boldsymbol{D}^9=\begin{pmatrix}1&-9\\0&1\end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}^9\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1&8&-9&9\\0&-1&-1&1\\-1&9&10&-10\\-1&7&8&-8\end{pmatrix}.$$