启航教育

2026 考研数学（一）真题

试卷及解析

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．设函数 $z=z\left(x，y\right)$ 由方程 $x-az=\mathrm{e}^{y+az}$（a 是非零常数）确定，则

A．$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$．

B．$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$．

C．$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{a}$．

D．$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{a}$．

1．【答案】A

【解析】（法一）由微分形式不变性得 $\mathrm{d}x-a\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{y+az}(\mathrm{d}y+a\mathrm{d}z)$，

整理得：$\left(a\mathrm{e}^{y+at}+a\right)\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\left(\mathrm{e}^{y+az}\right)\mathrm{d}y$，故 $\mathrm{d}z=\dfrac{1}{a}\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^{y+az}+1}\mathrm{d}x+\dfrac{-\mathrm{e}^{y+az}}{\mathrm{e}^{y+az}+1}\mathrm{d}y\right]$．

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{y+az}+1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{-\mathrm{e}^{y+az}}{\mathrm{e}^{y+az}+1}\right)$．

显然：$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$，选 A．

（法二）构造 $F(x,y,z)=x-az-\mathrm{e}^{y+az}$，

由 $\begin{cases}F_x'=1,\\ F_y'=-\mathrm{e}^{y+az},\\ F_z'=-a-\mathrm{e}^{y+az}\cdot a,\end{cases}$ 故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{1}{-a\left[1+\mathrm{e}^{y+az}\right]}=\frac{1}{a\left[1+\mathrm{e}^{y+az}\right]},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{-e^{y+az}}{-a\left[1+e^{y+az}\right]}=-\frac{e^{y+az}}{a\left[1+e^{y+az}\right]}.$$

故 $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{a}$，选 A.

2．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n x^{2n}$ 的收敛域是

A．$[-2,2]$.　　　　B．$[-1,1]$.

C．$(-2,2)$.　　　　D．$(-1,1)$.

2．【答案】D

【解析】由题知，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{4}\right)^n x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}x^{4n+2}+\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}$.

由 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}$ 的收敛域为 $(-1,1)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}x^{4n+2}$ 的收敛区间为 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 且当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时发散.故收敛域为 $(-1,1)$，选 D.

3．设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有定义，则

A．当 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减，在 $(0,1)$ 单调递增时，$f(0)$ 是极小值.

B．当 $f(0)$ 是极小值时，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减，在 $(0,1)$ 单调递增.

C．当 $f(x)$ 的图形在 $[-1,1]$ 是凹的时，$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1)$ 单调递增.

D．当 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1)$ 单调递增时，$f(x)$ 的图形在 $[-1,1]$ 是凹的.

3．【答案】C

【解析】对 A 选项：取 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 知 $f(0)$ 不是极小值，排除；

对 B 选项：取 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 知 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单增，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单减，但仍满足 $f(0)$ 是极小值，排除；

对 C 选项：若 $f(x)$ 的图形在 $[-1,1]$ 上是凹的（即凸函数，二阶导数非负或满足凸性定义），则对任意 $x_1<x_2<1$，有 $\dfrac{f(1)-f(x_1)}{1-x_1}\leq\dfrac{f(1)-f(x_2)}{1-x_2}$，

即 $\dfrac{f(x_1)-f(1)}{x_1-1}\leq\dfrac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1}$，故差商 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1)$ 单调递增。因此 C 正确。

对 D 选项，取 $f(x)=|x|$ 时，$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 单增，但 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 不是凹曲线，排除.

4．已知有界区域 Ω 由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成，函数 $f(u)$ 连续，则 $\iiint\limits_{\Omega} f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$

A．$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{4-r^2}} f\left(r^2+z^2\right)r\mathrm{d}z$.

B．$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{4-r^2}} f\left(r^2+z^2\right)r\mathrm{d}z$.

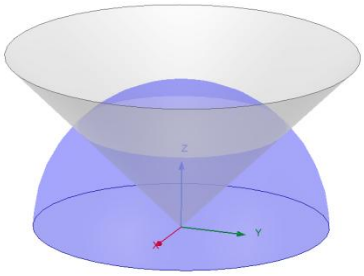
C．$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 f\left(r^2\right)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$.

D．$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 f\left(r^2\right)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$.

4．【答案】C

【解析】令 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$ 知

$$\iiint\limits_{\Omega} f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 f\left(r^2\right)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r,$$



故选 C.

5．单位矩阵经过若干次互换两行得到的矩阵称为置换矩阵.设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶置换矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

A．$\boldsymbol{A}^*$ 为置换矩阵.

B．$\boldsymbol{A}^{-1}$ 为置换矩阵.

C．$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*$.

D．$\boldsymbol{A}^{-1}=-\boldsymbol{A}^*$.

5．【答案】B

【解析】设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_{i_1j_1}\boldsymbol{E}_{i_2j_2}\cdots\boldsymbol{E}_{i_nj_n}$，

由于 $\left(\boldsymbol{E}_{ij}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_{ij},\left(\boldsymbol{E}_{ij}\right)^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}$，故

$\boldsymbol{A}^{-1}=\left(\boldsymbol{E}_{i_nj_n}\right)^{-1}\cdots\left(\boldsymbol{E}_{i_2j_2}\right)^{-1}\cdot\left(\boldsymbol{E}_{i_1j_1}\right)^{-1}=\boldsymbol{E}_{i_nj_n}\cdots\boldsymbol{E}_{i_2j_2}\boldsymbol{E}_{i_1j_1}$，仍为置换矩阵，故选 B.

$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=(-1)^n\boldsymbol{A}^{-1}$，$n$ 为偶数时，为置换矩阵；n 为奇数时，不为置换矩阵，故 A，C，D 错.

6．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量，若 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性表示，则

A．当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解时，$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 有解.

B．当 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解时，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解.

C．当 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 有解时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解.

D．当 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解时，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解.

6．【答案】A

【解析】当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解时，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组表示，而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组表示，故 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组表示，即 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 有解，选 A.

7．设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.若方程

$f\left(x_1, x_2, x_3\right)=-1$表示的曲面为圆柱面，则

A . $a=-4$，且$f\left(x_1, x_2, x_3\right)$的规范形为$-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

B . $a=-4$，且$f\left(x_1, x_2, x_3\right)$在正交变换下的标准形为$-6y_1^2-6y_2^2$.

C . $a=2$，且$f\left(x_1, x_2, x_3\right)$的规范形为$-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

D . $a=2$，且$f\left(x_1, x_2, x_3\right)$在正交变换下的标准形为$-6y_1^2-6y_2^2$.

7.【答案】B

【解析】由$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=-1$，得$-f\left(x_1,x_2,x_3\right)=1$，

圆柱面对应$p=2,q=0$，故$-f\left(x_1,x_2,x_3\right)$的特征值为 2 个正，1 个 0，因此$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$的特征值为 2 个负，1 个 0.

由 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$知其特征值为$a-2,a-2,a+4$，于是$a=-4$，三个特征值为$-6,-6,0$.

于是标准形为$-6y_1^2-6y_2^2$.

8．设随机函数$X\sim N(1,2)$，令$f(t)=E\left[(X+t)^2\right]$，则$f(t)$的最小值点和最小值分别为

A . $1,2$.

B . $1,4$.

C . $-1,2$.

D . $-1,4$.

8.【答案】C

【解析】$f(t)=E\left(X^2+2tX+t^2\right)=E\left(X^2\right)+2tEX+t^2=2+1^2+2t+t^2=t^2+2t+3$，

则令$f'(t)=2t+2=0$，解得驻点为$t=-1$.

又$f''(t)=2>0$，所以$t=-1$为唯一的极小值点，即最小值点，且最小值为

$f(-1)=1-2+3=2$.故选 C.

9．设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F\left(x\right)$，随机变量 Y 的分布函数为 $F\left(ay+b\right)$，X 的数学期望为 μ，方差为 $\sigma^2\left(\sigma>0\right)$，若 Y 的数学期望和方差分别为 0 和 1，则

A. $a=\sigma, b=\mu$.

B. $a=\sigma, b=-\mu$.

C. $a=\dfrac{1}{\sigma}, b=\mu$.

D. $a=\dfrac{1}{\sigma}, b=-\mu$.

9.【答案】A

【解析】设 X 的分布函数为 $F\left(x\right)$，密度函数为 $f\left(x\right)$；

Y 的分布函数为 $F\left(ay+b\right)$，密度函数为 $af\left(ay+b\right), a>0$.

由题意，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，即 $E(X^2)=\mu^2+\sigma^2$.

其中：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\mu, E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)\mathrm{d}x=\mu^2+\sigma^2$.

又 $E(Y)=0$，$D(Y)=1$，故 $E(Y^2)=0^2+1^2$.

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot a\cdot f(ay+b)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(ay+b)\mathrm{d}(ay+b)$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}(ay+b-b)\cdot f(ay+b)\mathrm{d}(ay+b)$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}(ay+b)\cdot f(ay+b)\mathrm{d}(ay+b)-\frac{b}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(ay+b)\mathrm{d}(ay+b)$$

$$=\frac{1}{a}E(X)-\frac{b}{a}\cdot 1=\frac{\mu-b}{a}=0.$$

所以 $b=\mu$.

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot a\cdot f(ay+b)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot f(ay+b)\mathrm{d}(ay+b)$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(ay+b)^2-2aby-b^2\right]f(ay+b)\mathrm{d}(ay+b)$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(ay+b)^2 f(ay+b)\mathrm{d}(ay+b)-\frac{2b}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(ay+b)\mathrm{d}(ay+b)-\frac{b^2}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(ay+b)\mathrm{d}(ay+b)$$

$$=\frac{1}{a^2}E(X^2)-\frac{2b}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(ay+b-b)f(ay+b)\mathrm{d}(ay+b)-\frac{b^2}{a^2}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\mu^2+\sigma^2\right)-\frac{2b}{a^2}E(X)+\frac{2b^2}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}$$

$$=\frac{\mu^2+\sigma^2-2b\mu+b^2}{a^2}$$

$$=1.$$

由于$b=\mu$，所以$\frac{\sigma^2}{a^2}=1$，且$a>0$，所以$a=\sigma$.

综上可知：$\begin{cases}a=\sigma,\\ b=\mu,\end{cases}$答案选 A.

10．设随机变量X的概率分布为$P\left\{X=k\right\}=\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^k}\left(k=1,2,\cdots\right)$，则对于正整数$m,n$，有

A．$P\left\{X>m+n \middle| X>m\right\}=P\left\{X>m\right\}$.

B．$P\left\{X>m+n \middle| X>m\right\}=P\left\{X>n\right\}$.

C．$P\left\{X>m+n \middle| X>m\right\}>P\left\{X>m\right\}$.

D．$P\left\{X>m+n \middle| X>m\right\}>P\left\{X>n\right\}$.

10.【答案】D

【解析】$P\{X>m\}=\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}P\left\{X=k\right\}=\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^k}\right)=\frac{\frac{1}{2^{m+2}}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3^{m+1}}}{1-\frac{1}{3}}$

$$=\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{3^m}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}\right).$$

$$P\left\{X>m+n\middle|X>m\right\}=\frac{P\{X>m+n\}}{P\{X>m\}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{m+n}}+\frac{1}{3^{m+n}}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{m}}+\frac{1}{3^{m}}\right)}\xlongequal{\left(\text{同乘}6^{m}\right)}\frac{\frac{3^m}{2^n}+\frac{2^m}{3^n}}{3^m+2^m}$$

而$P\{X>n\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$，所以

$$P\left\{X>m+n\middle|X>m\right\}-P\{X>n)=\frac{\frac{3^m}{2^n}+\frac{2^m}{3^n}}{3^m+2^m}-\frac{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}}{2}(\text{通分})$$

$$=\frac{2\left(\frac{3^m}{2^n}+\frac{2^m}{3^n}\right)-\frac{3^m+2^m}{2^n}-\frac{3^m+2^m}{3^n}}{2\left(3^m+2^m\right)}=\frac{\frac{3^m}{2^n}+\frac{2^m}{3^n}-\frac{2^m}{2^n}-\frac{3^m}{3^n}}{2\left(3^m+2^m\right)}$$

$$=\frac{\left(3^m-2^m\right)\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)}{2\left(3^m+2^m\right)}>0,$$

选择 D.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11．设向量$\boldsymbol{v}_1=(0,x,z),\boldsymbol{v}_2=(y,0,1)$. 令$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$, 则$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=$ ______.

11．【答案】$1+z$

【解析】由题知，$F(x,y,z)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&x&z\\y&0&1\end{vmatrix}=x\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}-xy\boldsymbol{k}$，

故$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial(yz)}{\partial y}+\frac{\partial(-xy)}{\partial z}=1+z$.

12．$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x\sin x}\right)=$ ________.

12．【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+x)}{x\sin x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]-\left[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

13．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2\sin^2 t,\\ y=t+\cos t\end{cases}\left(t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$________.

13.【答案】$-\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

【解析】由题知 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4\sin t\cos t=2\sin 2t,\\ \dfrac{dy}{dt}=1-\sin t,\end{cases}$

故 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{1-\sin t}{2\sin 2t}=y'(t)$，

则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{1}{2}\frac{(-\cos t)\sin 2t-(1-\sin t)2\cos 2t}{(\sin 2t)^2}}{2\sin 2t}=\dfrac{1}{4}\dfrac{-\cos t\sin 2t-2\cos 2t(1-\sin t)}{(\sin 2t)^3}$.

当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{-\frac{1}{\sqrt{2}}-0}{1}=-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

14．$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx=$_______.

14.【答案】$2\ln 2$

【解析】$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx=\int_1^{+\infty}\ln(x+1)d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln(1+x)}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$

$$=-(0-\ln 2)+\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx=\ln 2+\left(\ln\frac{x}{1+x}\right)\Big|_1^{+\infty}$$

$$=\ln 2+\left(0-\ln\frac{1}{2}\right)=2\ln 2.$$

15．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&a&2\\0&2&a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&-1&-1\\-1&2&1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$, 记 $m(\boldsymbol{X})$ 为 3 阶矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的实特征值中的最大值. 若 $m(\boldsymbol{A})<m(\boldsymbol{B})$, 则 a 的取值范围是_________.

15.【答案】$(-\infty,0)$

【解析】由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)[\lambda-(a-2)][\lambda-(a+2)]$，可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,a-2,a+2$.

又 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-2)[\lambda-(a-1)][\lambda-(a+1)]$，可得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $2,a-1,a+1$.

当 $a<-1$ 时，$m(\boldsymbol{A})=1,m(\boldsymbol{B})=2$，符合；

当 $-1\leqslant a<0$ 时，$m(\boldsymbol{A})=a+2,m(\boldsymbol{B})=2$，符合；

当 $0\le a<1$ 时，$m(\boldsymbol{A})=a+2,m(\boldsymbol{B})=2$，舍去；

当 $a\geqslant 1$ 时，$m(\boldsymbol{A})=a+2,m(\boldsymbol{B})=a+1$，舍去.

综上，$a\in(-\infty,0)$

16．设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，随机变量 Y 服从参数为 3 的泊松分布，X 与 $Y-X$ 相互独立，则 $E(XY)=$_________.

16.【答案】4

【解析】由 X 与 $Y-X$ 独立，可知二者不相关，即

$$\mathrm{Cov}(X,Y-X)=\mathrm{Cov}(X,Y)-DX=0.$$

也即 $E(XY)-EX\cdot EY-DX=0$.

所以 $E(XY)=EX\cdot EY+DX=1\times3+1=4$.

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=(2x^2-y^2)\mathrm{e}^x$ 的极值.

17.【解】由题可知，$f_x'=4x\mathrm{e}^x+(2x^2-y^2)\mathrm{e}^x, f_y'=-2y\mathrm{e}^x$.

令 $\begin{cases}f_x'=0\\ f_y'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2,\\ y=0.\end{cases}$

又 $A=f_{xx}''=\mathrm{e}^x(2x^2+8x+4-y^2), B=f_{xy}''=-2y\mathrm{e}^y, C=f_{yy}''=-2\mathrm{e}^x$,

故 $AC-B^2\big|_{(0,0)}=-8<0, AC-B^2\big|_{(-2,0)}=8\mathrm{e}^{-4}>0$ 且 $A_{(-2,0)}=-4\mathrm{e}^{-2}<0$,|

则 $(0,0)$ 为非极值点，$(-2,0)$ 为极大值点且极大值 $f(-2,0)=\dfrac{8}{\mathrm{e}^2}$.

18.（本题满分 12 分）

设函数 $f(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内具有 3 阶连续导数，且存在可微函数 $F(x,y)$ 使得

$$\mathrm{d}F(x,y)=\frac{f(xy)}{x^2y}\mathrm{d}x+\frac{f''(xy)}{xy^2}\mathrm{d}y(xy>0).$$

（1）证明：$\dfrac{f''(u)}{u}-\dfrac{f(u)}{u}=C$，$C$ 为常数；

（2）设 $f(1)=1, f'(1)=-1, f''(1)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

18.【解】根据全微分性质，混合偏导数是相等的.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(xy)}{x^2y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f''(xy)}{xy^2}\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(xy)}{x^2y}\right)=\frac{xyf'(xy)-f(xy)}{x^2y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f''(xy)}{x\left(y^2\right)}\right)=\frac{xyf'''(xy)-f''(xy)}{x^2y^2}.$$

将两边相等得到 $xyf'(xy)-f(xy)=xyf'''(xy)-f''(xy)$

令 $u=xy$，$uf'(u)-f(u)=uf'''(u)-f''(u)$.

两边同时除以 $u(u>0)$，得

$$f'''(u)-\frac{f''(u)}{u}=f'(u)-\frac{f(u)}{u}.$$

等价为 $f'''(u)-f'(u)=\dfrac{f''(u)}{u}-\dfrac{f(u)}{u}$.

令 $g(u)=\dfrac{f''(u)}{u}-\dfrac{f(u)}{u}$，则 $g'(u)=0\Rightarrow g(x)$ 为常数.

（2）由（1）得，$\dfrac{f''(u)}{u}-\dfrac{f(u)}{u}=C$.

两边同时乘 u 得，$f''(u)-f(u)=Cu$.

①其特征方程为 $r^2-1=0$，解得 $r=\pm1$.

故齐次方程通解为 $y=C_1\mathrm{e}^u+C_2\mathrm{e}^{-u}$.

②设特解 $Au+B$，代入得 $0-Au-B=Cu$，解得 $A=-C,B=0$.故 $y^*=-Cu$.

因此非齐次通解为 $y_{非齐通}=y=C_1\mathrm{e}^u+C_2\mathrm{e}^{-u}-Cu$.

由 $f(1)=1,f'(1)=-1,f''(1)=0$ 得 $C_1=-\dfrac{1}{\mathrm{e}},C_2=\mathrm{e},C=-1$.

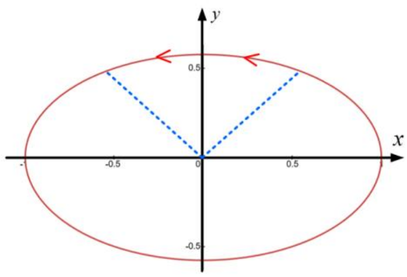
故 $f(u)=-e^{u-1}+e^{1-u}+u$.

19.（本题满分 12 分）

设有向曲线 L 为椭圆 $x^2+3y^2=1$ 上沿逆时针方向从点 $A\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 到点 $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 的部分，计算曲线积分 $I=\int_L\left(e^{x^2}\sin x-2xy\right)dx+\left(6x-x^2-y\cos^4 y\right)dy$.

19.【解】令 $P=e^x\sin x-2xy$，$Q=6x-x^2-y\cos^4 y$，

$\overline{BA}$：从 B 到 A 直线段，$\overline{BA}$ 与 L 所围区城为 D，如下图所示：



则 $I=\int_{L+\overline{BA}}Pdx+Qdy-\int_{\overline{BA}}Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-\int_{\overline{BA}}Pdx+Qdy$ ，

其中 $\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=6\iint\limits_D dxdy=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\pi$，

$\int_{\overline{BA}}Pdx+Qdy=\int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\left(e^{x^2}\sin x-2x^2+6x-x^2-x\cos^4 x\right)dx=-\frac{1}{4}$，

故原式 $I=\sqrt{3}\pi+\frac{1}{4}$.

20.（本题满分 12 分）

设可导函数 $f(x)$ 严格单调递增且满足 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$，记 $a=\int_0^1 f(x)dx$.

（1）证明 $a>0$;

（2）令 $F\left(x\right)=a\left(1-x^{2}\right)+\int_{1}^{x} f\left(t\right)\mathrm{d}t$，证明：存在 $\xi\in\left(-1,1\right)$，使得 $F''\left(\xi\right)=0$.

20.【证明】（1）由 $f(x)$ 单增可知，$\forall x\in[-1,0)$，有 $f(x)<f(0)$；$\forall x\in(0,1]$，有 $f(x)>f(0)$.

故 $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x<\int_{-1}^{0} f(0)\mathrm{d}x=f(0)$，$\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x>\int_{0}^{1} f(0)\mathrm{d}x=f(0)$，

则 $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x<f(0)<\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

又因为 $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=a$，代入不等式得 $-a<f(0)<a$，故 $|f(0)|<a$ 则 $a>0$.

（2）由题可知 $F(-1)=F(0)=F(1)=0$，又因为 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续且可导.

由罗尔定理可知：

$$F'(\xi_1)=0,\quad \xi_1\in\left(-1,0\right);$$

$$F'(\xi_2)=0,\quad \xi_2\in\left(-1,0\right),$$

$$F''(\xi)=0,\xi\in\left(\xi_1,\xi_2\right)\subset(-1,1).$$

21.（本题满分 12 分）

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$, 记

$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)$，$\boldsymbol{G}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right)$.

（1）证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组；

（2）求矩阵 $\boldsymbol{H}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{GH}$，并求 $\boldsymbol{A}^{10}$.

21．【解】 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&1\\-1&0&1&-1\\-1&-2&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

$r(\boldsymbol{A})=2$ 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

又 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组. 故

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)_{1\times4}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)_{1\times2}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}_{2\times4},$$

$$\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{GHGH}\cdots\boldsymbol{GH}=\boldsymbol{GD}^9\boldsymbol{H},$$

其中 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}_{2\times4}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&-2\end{pmatrix}_{4\times2}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}_{2\times2}$.

又 $\boldsymbol{D}^2=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{D}^3=\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}$，由此可推出 $\boldsymbol{D}^9=\begin{pmatrix}1&-9\\0&1\end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{GD}^9\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1&8&-9&9\\0&-1&-1&1\\-1&9&10&-10\\-1&7&8&-8\end{pmatrix}.$$

22．（本题满分 12 分）

假设某种元件的寿命服从指数分布，其均值 θ 是未知参数.为估计 θ，取 n 个这种元件同时做寿命试验，试验到出现 $k\,(1\le k\le n)$ 个元件失效时停止.

（1）若 $k=1$，失效元件的寿命记为 T，（i）求 T 的概率密度；（ii）确定 a，使得 $\hat{\theta}=aT$ 是 θ 的无偏估计，并求 $D(\hat{\theta})$；

（2）已知 k 个失效元件的寿命值分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_k$，且 $t_1\le t_2\le\cdots\le t_k$，似然函数为

$L(\theta)=\frac{1}{\theta^k}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]}$，求 θ 的最大似然估计值.

22.【解】(1)(i) 设元件的寿命分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，则每个样本均服从参数 $\lambda=\frac{1}{\theta}$ 的指数分布，即

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

当 $k=1$ 时，$T=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，设 T 的分布函数为 $F_T(t)$，则

$$F_T(t)=P\{T\leq t\}=1-P\{\min\{X_1,\cdots,X_n\}>t\}=1-\prod_{i=1}^{n}P\{X_i>t\}=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{n}{\theta}t}, & t\geq 0.\end{cases}$$

T 的概率密度为

$$f_T(t)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{n}{\theta}t}, & t>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(ii) 由(i)可知，$T\sim E\left(\frac{n}{\theta}\right)$

所以 $E(T)=\frac{\theta}{n},D(T)=\frac{\theta^2}{n^2}$，故 $E(\hat{\theta})=a\cdot\frac{\theta}{n}$.

当 $a=n$ 时，$\hat{\theta}=aT$ 为 θ 的无偏估计量.

$$D(\hat{\theta})=D(nT)=n^2DT=n^2\cdot\frac{\theta^2}{n^2}=\theta^2.$$

(2) 似然函数为

$$L(\theta)=\frac{1}{\theta^k}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]},$$

$$\ln L(\theta)=-k\ln\theta-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right],$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{k}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]=0$，解得

$$\theta=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}t_i+\frac{n-k}{k}t_k,$$

即 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}t_i+\frac{n-k}{k}t_k.$$