2026 年全国硕士研究生招生考试

数学（二）预测卷（一）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

（以下信息考生必须认真填写）

考生编号															
考生姓名															

一、选择题：1~10小题，每小题5分，共50分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的．

1. 当$x \to 0^+$时，下列无穷小量中，最高阶的是

A. $\int_0^{x^2}(e^{t^2}+1)dt$.　　B. $\int_0^{x}\ln(1+\sqrt{t^3})dt$.

C. $\int_0^{\sin x}\cos t^2 dt$.　　D. $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\arcsin^3 t}\,dt$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{(n+1)^2}+\dfrac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(n+n)^2}\right]=$

A. $\dfrac{1}{3}$.　　B. $\dfrac{\pi}{3}$.　　C. $\dfrac{1}{2}$.　　D. $\dfrac{\pi}{2}$.

3. 曲线$y=x+\sqrt{x^2-x+1}$的渐近线条数为

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

4. 函数$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在$(0,0)$点

A. 连续，但偏导数不存在．　　B. 偏导数存在且连续．

C. 可微．　　D. 偏导数存在，但不可微．

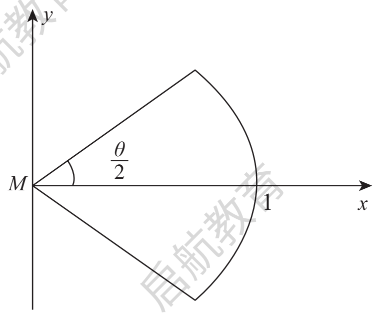
5. 设线密度为1的圆弧形细杆，其半径为1，圆心角为θ，摆放位置如图所示，G为引力常数，则该细杆对圆心处质量为m的质点M的水平引力大小为

A. $2Gm\sin\dfrac{\theta}{2}$.

B. $\sqrt{2}Gm\sin\dfrac{\theta}{2}$.

C. $2Gm\cos\dfrac{\theta}{2}$.

D. $\sqrt{2}Gm\cos\dfrac{\theta}{2}$.



6. 若微分方程$y''+ay'+by=0$的解在$(-\infty,+\infty)$上必为周期函数，则

A. $a=0,b>0$.　　B. $a=0,b<0$.　　C. $a\neq 0,b<0$.　　D. $a\neq 0,b>0$.

7. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx=$

A. $\dfrac{3e}{4}-\dfrac{\sqrt{e}}{2}$.　　B. $\dfrac{3e}{4}+\dfrac{\sqrt{e}}{2}$.　　C. $\dfrac{3e}{8}-\dfrac{\sqrt{e}}{2}$.　　D. $\dfrac{3e}{8}+\dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

8. 设向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示，但不可由向量组（Ⅰ）：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，记向

量组(Ⅱ): $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$,则

A. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不可由向量组(Ⅰ)线性表示,也不可由向量组(Ⅱ)线性表示.

B. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不可由向量组(Ⅰ)线性表示,但可由向量组(Ⅱ)线性表示.

C. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由向量组(Ⅰ)线性表示,也可由向量组(Ⅱ)线性表示.

D. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由向量组(Ⅰ)线性表示,但不可由向量组(Ⅱ)线性表示.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解,则

A. $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

B. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

C. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 没有非零公共解.

D. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有两个非零公共解.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶矩阵,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{\beta}=(-1,2,-2)^{\mathrm T}$.已知 $\lambda=2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda=2$ 的特征向量,则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=$

A. $\begin{pmatrix}2&2&-1\\4&0&2\\0&2&-2\end{pmatrix}$.

B. $\begin{pmatrix}2&2&-1\\4&0&-2\\0&2&2\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}2&2&-2\\4&0&4\\0&2&-4\end{pmatrix}$.

D. $\begin{pmatrix}2&2&2\\4&0&-4\\0&2&4\end{pmatrix}$.

二、填空题:11~16小题,每小题5分,共30分.

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{\int_0^{x^2}(1+t)^{\frac1t}\mathrm dt}=$________.

12. 曲线 $3y^3=x^5+2x^3$ 在 $y=1$ 对应点处的切线斜率为________.

13. 曲线 $y=x\mathrm e^{-\frac{1}{x+1}}$ 的斜渐近线方程为________.

14. 设 $f(x)$ 为连续函数,且 $x^2+y^2+z^2=\int_x^y f(x+y-t)\mathrm dt$,则 $z\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=$________.

15. 微分方程 $(x-y-1)\mathrm dx+(x+4y-1)\mathrm dy=0$ 的通解为________.

16. 已知方程组(Ⅰ) $\begin{cases}x_2+ax_3=0,\\x_1+x_2+(a+1)x_3=0\end{cases}$ 的解均是方程组(Ⅱ) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=0,\\x_1+x_2+bx_3=0\end{cases}$ 的解,但方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)不同解.设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为方程组(Ⅰ)的系数矩阵,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为方程组(Ⅱ)的系数矩阵,则 $\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}=$________.

三、解答题：17~22小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分10分）

设曲面 $z=f(x,y)$ 过点 $(0,0,2)$，且 Δz 关于 x 的偏增量 $\Delta_x z=-2xe^{-y}\cdot\Delta x+o(\Delta x)$，$\Delta z$ 关于 y 的偏增量 $\Delta_y z=e^{-y}(x^2-y-1)\Delta y+o(\Delta y)$，求 $z=f(x,y)$ 的表达式及 z 的极值.

18.（本题满分12分）

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3+ax+3y+b=0$ 确定，$y(1)=1$，$y'(1)=0$，求

（1）a,b 的值；

（2）$y(x)$ 的极值.

19.（本题满分12分）

（1）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3;$$

（2）设 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $g(-1)=g(1),g'(0)=0$，证明存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $g'''(\eta)=0$.

20.（本题满分12分）

设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 2x+2y\right\}$，求二重积分 $\iint\limits_D(x^2+x+y)\mathrm{d}\sigma$.

21.（本题满分12分）

设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ \ln x, & x>1,\end{cases}$ $g(x)=e^{x-1}$.

（1）求 $\varphi(x)=f[g(x)]$；

（2）求在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 y，使之在 $(-\infty,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内满足微分方程 $y'-y=\varphi(x)$，且 $y(0)=0$.

22.（本题满分12分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&5\\5&7&9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$.

（1）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

（2）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

数学（二）预测卷（一）试题答案及评分参考

一、选择题

1.答　应选D.

解　当$x \to 0^+$时，

$$\int_0^{x^2}(e^{t^2}+1)dt \sim \int_0^{x^2} 2dt = 2x^2,$$

$$\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt \sim \int_0^x t^{\frac{3}{2}}dt = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$$

$$\int_0^{\sin x}\cos t^2 dt \sim \int_0^{\sin x} 1dt = \sin x \sim x,$$

$$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\arcsin^3 t}\,dt \sim \int_0^{1-\cos x} t^{\frac{3}{2}}dt = \frac{2}{5}(1-\cos x)^{\frac{5}{2}} \sim \frac{\sqrt{2}}{20}x^5.$$

2.答　应选C.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\dfrac{dx}{(1+x)^2}=-\dfrac{1}{1+x}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}$.

3.答　应选B.

解　显然，曲线没有铅直渐近线．当$x\to+\infty$时，$y\to+\infty$，所以沿$x\to+\infty$方向不存在水平渐近线．

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}=2,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim_{x\to+\infty}(-x+\sqrt{x^2-x+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}.$$

故曲线有斜渐近线$y=2x-\dfrac{1}{2}$．再看沿$x\to-\infty$方向：

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-x+1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=\frac{1}{2}.$$

故曲线有水平渐近线$y=\dfrac{1}{2}$.综上,曲线有2条渐近线.

4.答　应选D.

解　从讨论函数是否有偏导数和是否可微入手.

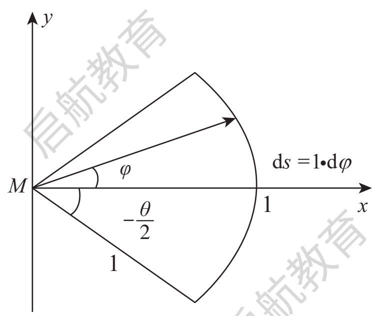
由于$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot 0|}-0}{\Delta x}=0$,因此$f_x'(0,0)=0$,同理$f_y'(0,0)=0$.

令$\alpha=\Delta f-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y=\sqrt{|\Delta x\Delta y|}$,$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,当$(\Delta x,\Delta y)$沿$y=x$趋于$(0,0)$点时,$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\alpha}{\rho}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\sqrt{2(\Delta x)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$,因此$f(x,y)$在$(0,0)$点不可微.

5.答　应选A.

解　如图所示.圆弧形细杆上一小段ds对质点M的引力为

$$\mathrm{d}F=Gm\mathrm{d}s=Gm\mathrm{d}\varphi.$$



在x轴方向的分量为

$$\mathrm{d}F_x=Gm\cos\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

故

$$F_x=\int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}}Gm\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=2\int_0^{\frac{\theta}{2}}Gm\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=2Gm\sin\frac{\theta}{2}.$$

6.答　应选A.

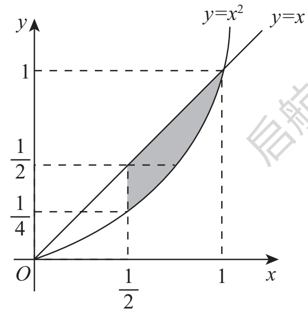
解　若该微分方程的解必有周期性,则解的形式只能为$y=A\cos\beta x+B\sin\beta x$,故对应的特征方程的根为$r_{1,2}=\pm\beta\mathrm{i}$,此时,特征方程为$r^2+\beta^2=0$.故微分方程$y''+ay'+by=0$中的系数$a,b$需满足:$a=0,b=\beta^2>0$.

7.答　应选C.

解　积分区域如图所示.交换积分次序,可得

$$原式=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\mathrm{e}x-x\mathrm{e}^{x})\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{\mathrm{e}}{2}x^2-(x-1)\mathrm{e}^{x}\right]\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{3}{8}\mathrm{e}-\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}.$$



8.**答** 应选B.

解 先判别$\boldsymbol{\alpha}_4$可否由向量组(Ⅱ)线性表示.

因为$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示,则存在一组实数$k_1,k_2,k_3,k_4$,使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4\,. \qquad ①$$

若$k_4=0$,则$\boldsymbol{\beta}$可由向量组(Ⅰ)线性表示,与已知矛盾,故$k_4\neq 0$.从而有

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\frac{1}{k_4}(\boldsymbol{\beta}-k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_2\boldsymbol{\alpha}_2-k_3\boldsymbol{\alpha}_3)\,,$$

即$\boldsymbol{\alpha}_4$可由向量组(Ⅱ)线性表示.

再判别$\boldsymbol{\alpha}_4$可否由向量组(Ⅰ)线性表示.

如果$\boldsymbol{\alpha}_4$可由向量组(Ⅰ)线性表示,则存在一组实数l_1,l_2,l_3,使得

$$\boldsymbol{\alpha}_4=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3\,. \qquad ②$$

将②式代入①式,得

$$\boldsymbol{\beta}=(k_1+k_4l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_4l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3+k_4l_3)\boldsymbol{\alpha}_3\,.$$

这表示$\boldsymbol{\beta}$可由向量组(Ⅰ)线性表示,与已知矛盾,所以$\boldsymbol{\alpha}_4$不可由向量组(Ⅰ)线性表示.

9.**答** 应选B.

解 因为齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有两个线性无关的解,所以方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系所含向量个数$n-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$.于是,$r(\boldsymbol{A})\leqslant n-2$,由此得$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$,可知任意$n$维列向量均是方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解.因此,方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解均是$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解,选项B正确.选项A显然不正确.

对于选项C,D,由于方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系至少含有两个解向量,故$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有无穷多个非零解,与$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$也有无穷多个非零公共解.显然选项C,D均不正确.

10.**答** 应选C.

解 将向量$\boldsymbol{\beta}$表示为$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$的线性组合形式.由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$.因为$\lambda=2$是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$是矩阵$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda=2$的特征向量，故向量$\boldsymbol{\beta}$也是矩阵$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda=2$的特征向量.则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=(2\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}2&2&-2\\4&0&4\\0&2&-4\end{pmatrix}.$$

二、填空题

11.答　应填$-\dfrac{1}{6\mathrm{e}}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{\int_0^{x^2}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}-1}{\mathrm{e}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{\mathrm{e}x^3}=-\dfrac{1}{6\mathrm{e}}$.

12.答　应填$\dfrac{11}{9}$.

解　方程$3y^3=x^5+2x^3$两边同时对x求导得$9y^2\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=5x^4+6x^2$.

当$y=1$时，$x=1$，代入上式得$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\dfrac{11}{9}$，即曲线在$y=1$对应点处的切线斜率为$\dfrac{11}{9}$.

13.答　应填$y=x-1$.

解
$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}=-1,$$

故斜渐近线方程为　$y=x-1$.

14.答　应填$-(x+y)+\dfrac{f(y)-f(x)}{2}$.

解　令$x+y-t=u$，得$x^2+y^2+z^2=\int_x^y f(u)\mathrm{d}u$.等式两端分别对$x$，$y$求偏导，得

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=-f(x)\text{，}2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=f(y)\text{ .}$$

所以
$$z\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-(x+y)+\frac{f(y)-f(x)}{2}\text{ .}$$

15.答　应填 $\ln\left[(x-1)^2+4y^2\right]+\arctan\frac{2y}{x-1}=C$，$C$ 为任意常数.

解　将原方程写成
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-(x-1)+y}{(x-1)+4y}\text{，}$$

令 $X=x-1$，$Y=y$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X$，$\mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$，原方程化为 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{-X+Y}{X+4Y}$，即

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{\frac{Y}{X}-1}{\frac{4Y}{X}+1}\text{，}$$

令 $u=\frac{Y}{X}$，则有 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$，此时原方程化为 $X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\frac{-1-4u^2}{4u+1}$，此为可分离变量的微分方程，即 $\frac{4u+1}{4u^2+1}\mathrm{d}u=-\frac{1}{X}\mathrm{d}X$，解得 $\ln\left[X^2(4u^2+1)\right]+\arctan 2u=C$.

将 $u=\frac{Y}{X}=\frac{y}{x-1}$，$X=x-1$ 代入，得方程的通解为 $\ln\left[(x-1)^2+4y^2\right]+\arctan\frac{2y}{x-1}=C$，$C$ 为任意常数.

16.答　应填 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\2&4&6\end{pmatrix}$.

解　由题意，得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&a\\1&1&a+1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&b\end{pmatrix}$，可知 $r(\boldsymbol{A})=2$.由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，可知 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解且 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{B})$，进而可得 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})=2$，又 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 不同解，故 $r(\boldsymbol{B})=1$，得 $b=2$.

又 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&a\\1&1&a+1\\1&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&a\\0&0&a-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，且 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=2$，故 $a=1$.

于是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\2&4&6\end{pmatrix}$.

三、解答题

17.**解**　由题设可知 $f_x'(x,y)=-2x\mathrm{e}^{-y}$，$f_y'(x,y)=\mathrm{e}^{-y}(x^2-y-1)$，$f(0,0)=2$.

等式 $f_x'(x,y)=-2x\mathrm{e}^{-y}$ 两边同时对 x 积分，得

$$f(x,y)=-x^2\mathrm{e}^{-y}+\varphi(y)\,,$$ ……2分

则
$$f_y'(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-y}+\varphi'(y)\,,$$ ……3分

由已知 $f_y'(x,y)=\mathrm{e}^{-y}(x^2-y-1)$，可得 $\varphi'(y)=-(y+1)\mathrm{e}^{-y}$. $\varphi'(y)$ 对 y 积分，得

$$\varphi(y)=(y+2)\ \mathrm{e}^{-y}+C,$$

则
$$f(x,y)=-x^2\mathrm{e}^{-y}+(y+2)\mathrm{e}^{-y}+C\,.$$

由 $f(0,0)=2$ 可得 $C=0$，故 $z=f(x,y)=(-x^2+y+2)\mathrm{e}^{-y}$. ……5分

令 $\begin{cases}f_x'(x,y)=-2x\mathrm{e}^{-y}=0,\\f_y'(x,y)=(x^2-y-1)\mathrm{e}^{-y}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\y=-1.\end{cases}$ ……7分

又
$$f_{xx}''(x,y)=-2\mathrm{e}^{-y}\,,\ f_{xy}''(x,y)=2x\mathrm{e}^{-y}\,,\ f_{yy}''(x,y)=(-x^2+y)\mathrm{e}^{-y}\,,$$

则在点 $(0,-1)$ 处，$A=f_{xx}''(0,-1)=-2\mathrm{e}$，$B=f_{xy}''(0,-1)=0$，$C=f_{yy}''(0,-1)=-\mathrm{e}$，可得 $AC-B^2>0$，

且 $A<0$. ……9分

故 $z=f(x,y)$ 在 $(0,-1)$ 处取得极大值，极大值为 $f(0,-1)=\mathrm{e}$. ……10分

18.**解**　（1）由 $y(1)=1$，有 $5+a+b=0$，又在方程两端同时对 x 求一阶导，有

$$3x^2+3y^2\bullet y'+a+3y'=0\,,$$ ①

由 $y'(1)=0$，有 $3+a=0$，解得 $a=-3$，$b=-2$. ……4分

（2）方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 两端同时对 x 求二阶导，有

$$6x+6y(y')^2+3y^2y''+3y''=0\,,$$ ②

……6分

在①式中令 $y'=0$，得 $x=-1$ 或 $x=1$.由极值的必要条件可知，极值点可能为 $x=-1$，$x=1$.

当 x 分别取 -1 和 1 时，由 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$，得 $y(-1)=0$，$y(1)=1$.

将 $x=-1$，$y(-1)=0$ 及 $y'(-1)=0$ 代入②式，得 $y''(-1)=2$.

因为$y'(-1)=0$，$y''(-1)=2>0$，根据极值的第二充分条件，$y(-1)=0$是$y(x)$的极小值.

……9分

将$x=1$，$y(1)=1$及$y'(1)=0$代入②式，得$y''(1)=-1$.

因为$y'(1)=0$，$y''(1)=-1<0$，根据极值的第二充分条件，$y(1)=1$是$y(x)$的极大值.

……12分

19. **证** （1）由题可知，$f(x)$在$[a,b]$上具有二阶连续导数，故

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}(x-a)=f(x)(x-a)\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}-\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}-f'(x)\cdot\frac{(x-a)^2}{2}\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}+\int_a^{\frac{a+b}{2}} f''(x)\frac{(x-a)^2}{2}\mathrm{d}x$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{(b-a)^2}{8}+f''(\xi_1)\cdot\frac{(b-a)^3}{48}, \qquad ①$$

……3分

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\mathrm{d}(x-b)=f(x)(x-b)\Big|_{\frac{a+b}{2}}^{b}-\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}-f'(x)\cdot\frac{(x-b)^2}{2}\Big|_{\frac{a+b}{2}}^{b}+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f''(x)\frac{(x-b)^2}{2}\mathrm{d}x$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{(b-a)^2}{8}+f''(\xi_2)\cdot\frac{(b-a)^3}{48}, \qquad ②$$

其中ξ_1介于a与$\frac{a+b}{2}$之间，ξ_2介于$\frac{a+b}{2}$与b之间. ……6分

①式与②式相加，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{24}$$

$$\xlongequal[\text{介值性}]{\text{导函数的}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24},$$

其中$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$. ……8分

（2）由题可知，$g'(x)$在$[-1,1]$上具有二阶连续导数，由（1）知，存在$\eta\in(-1,1)$，使

$$\int_{-1}^{1} g'(x)\mathrm{d}x=g'\left(\frac{-1+1}{2}\right)(1+1)+\frac{g'''(\eta)}{24}(1+1)^3,$$

即 $g(1)-g(-1)=2g'(0)+\dfrac{g'''(\eta)}{3}$，又因为 $g(-1)=g(1)$，$g'(0)=0$，故 $g'''(\eta)=0$． ……12分

20.解　法一　令 $\begin{cases} x=1+r\cos\theta, \\ y=1+r\sin\theta, \end{cases}$ 则 $D=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}\right\}$， ……2分

故 $$\iint\limits_D (x^2+x+y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left[(1+r\cos\theta)^2+1+r\cos\theta+1+r\sin\theta\right]r\mathrm{d}r$$ ……5分

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left[3r+r^2(3\cos\theta+\sin\theta)+r^3\cos^2\theta\right]\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[3+\frac{2\sqrt{2}}{3}(3\cos\theta+\sin\theta)+\cos^2\theta\right]\mathrm{d}\theta$$ ……9分

$=7\pi.$ ……12分

法二　将 D 改写成 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant(\sqrt{2})^2\right\}$，令 $u=x-1$，$v=y-1$，则

$$\iint\limits_D (x^2+x+y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 2}\left[(u+1)^2+u+1+v+1\right]\mathrm{d}\sigma'$$ ……4分

$$=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 2}(u^2+3u+v+3)\mathrm{d}\sigma'=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 2}u^2\mathrm{d}\sigma'+3\cdot 2\pi$$

……6分

$$=6\pi+\frac{1}{2}\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 2}(u^2+v^2)\,\mathrm{d}\sigma'=6\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

……9分

$=6\pi+\pi$

$=7\pi$． ……12分

21.解　(1) $$\varphi(x)=f[g(x)]=\begin{cases} g(x), & g(x)<1, \\ \ln g(x), & g(x)>1 \end{cases}$$ ……2分

$$=\begin{cases} \mathrm{e}^{x-1}, & x<1, \\ x-1, & x>1. \end{cases}$$ ……4分

(2) 当 $x<1$ 时，$y'-y=\mathrm{e}^{x-1}$，根据一阶线性微分方程的通解公式，得

$$y=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{e}^{\int(-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right]$$

$$=e^x\left(\frac{x}{e}+C_1\right).$$ ……6分

由 $y(0)=0$，得 $C_1=0$，即 $y=xe^{x-1}$，且由题设知 $y(1)=\lim\limits_{x\to1^-}xe^{x-1}=1$.

当 $x>1$ 时，$y'-y=x-1$，根据一阶线性微分方程的通解公式，得

$$y=e^{\int dx}\left[\int(x-1)e^{\int(-1)dx}dx+C_2\right]$$

$$=e^x(-xe^{-x}+C_2)=-x+C_2e^x.$$ ……9分

由题设知 $\lim\limits_{x\to1^+}y(x)=1$，得 $C_2=2e^{-1}$，故 $y=-x+2e^{x-1}$.

综上，$y=\begin{cases}xe^{x-1}, & x\leqslant1,\\ -x+2e^{x-1}, & x>1.\end{cases}$ ……12分

22.**解** （1）$f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$，因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-2&\lambda-4&-6\\-3&-6&\lambda-9\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-14),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=14$，$\lambda_2=\lambda_3=0$. ……3分

当 $\lambda_1=14$ 时，解方程组 $(14\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$；

……5分

当 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 时，解方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$，正交单位化得 $\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{70}}\\-\frac{6}{\sqrt{70}}\\\frac{5}{\sqrt{70}}\end{pmatrix}$. ……7分

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵, 且

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下, $f(x_1,x_2,x_3)$ 可化为标准形 $14y_1^2$. ……8分

(2) 由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 及(1), 得 $14y_1^2=0$, 故 $y_1=0$. 又 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$, 从而 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解满足 $x_1+2x_2+3x_3=0$. ……10分

故 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k_1,k_2 为任意常数. ……12分