2026 年全国硕士研究生招生考试

数学（三）预测卷（一）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

（以下信息考生必须认真填写）

考生编号															
考生姓名															

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的.

1. 当 $x \to 0^+$ 时，下列无穷小量中，最高阶的是

A. $\int_0^{x^2} (e^{t^2}+1)dt$.

B. $\int_0^{x} \ln(1+\sqrt{t^3})dt$.

C. $\int_0^{\sin x} \cos t^2 dt$.

D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\arcsin^3 t}\, dt$.

2. 若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上必为周期函数，则

A. $a=0,b>0$.　B. $a=0,b<0$.　C. $a\neq 0,b<0$.　D. $a\neq 0,b>0$.

3. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx =$

A. $\frac{3e}{4}-\frac{\sqrt{e}}{2}$.　B. $\frac{3e}{8}-\frac{\sqrt{e}}{2}$.　C. $\frac{3e}{4}+\frac{\sqrt{e}}{2}$.　D. $\frac{3e}{8}+\frac{\sqrt{e}}{2}$.

4. 设 $f(x)=\arcsin x-\frac{x}{1+ax^2}$，$f'''(0)=2$，则 $a=$

A. $\frac{1}{6}$.　B. $\frac{1}{4}$.　C. $\frac{1}{3}$.　D. $\frac{1}{2}$.

5. 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，但不可由向量组（Ⅰ）：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，记向量组（Ⅱ）：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$，则

A. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不可由向量组（Ⅰ）线性表示，也不可由向量组（Ⅱ）线性表示.

B. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不可由向量组（Ⅰ）线性表示，但可由向量组（Ⅱ）线性表示.

C. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由向量组（Ⅰ）线性表示，也可由向量组（Ⅱ）线性表示.

D. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由向量组（Ⅰ）线性表示，但不可由向量组（Ⅱ）线性表示.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解，则

A. $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

B. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

C. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 没有非零公共解.

D. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有两个非零公共解.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(-1,2,-2)^T$. 已知 $\lambda=2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda=2$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=$

A. $\begin{pmatrix}2&2&-1\\4&0&2\\0&2&-2\end{pmatrix}$.　B. $\begin{pmatrix}2&2&-1\\4&0&-2\\0&2&2\end{pmatrix}$.　C. $\begin{pmatrix}2&2&-2\\4&0&4\\0&2&-4\end{pmatrix}$.　D. $\begin{pmatrix}2&2&2\\4&0&-4\\0&2&4\end{pmatrix}$.

8. 设总体X的概率分布如下.

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

从总体X中抽取n个简单随机样本，N_1表示n个样本中取到-1的个数，N_2表示n个样本中取到0的个数，N_3表示n个样本中取到1的个数，则N_1与N_2的相关系数为

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　C. -1.　　D. 1.

9. 设总体X服从参数为1的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本.记$\upsilon_n(1)$为n个观测值中不大于1的个数，则当n充分大时，$\frac{\upsilon_n(1)}{n}$依概率收敛于

A. $1-\frac{1}{\mathrm{e}}$.　　B. $\frac{1}{\mathrm{e}}$.　　C. $1-\frac{2}{\mathrm{e}}$.　　D. $\frac{2}{\mathrm{e}}$.

10. 设总体$X\sim U(0,\alpha)$，$Y\sim U(\alpha,2\alpha)$，$\alpha>0$为未知参数. X,Y相互独立.记$Z_{(a,b)}=aX+bY$，则当$E(Z_{(a,b)})=\alpha$，且$D(Z_{(a,b)})$最小时，有

A. $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$.　　B. $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{1}{3}$.　　C. $a=\frac{1}{5}$，$b=\frac{3}{5}$.　　D. $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$.

二、填空题：11~16小题，每小题5分，共30分.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\int_0^{x^2}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}=$________.

12. 曲线$y=x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}}$的斜渐近线方程为________.

13. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n}{(2n+1)!}=$________.

14. 微分方程$(x-y-1)\mathrm{d}x+(x+4y-1)\mathrm{d}y=0$的通解为________.

15. 已知方程组（Ⅰ）$\begin{cases}x_2+ax_3=0,\\ x_1+x_2+(a+1)x_3=0\end{cases}$的解均是方程组（Ⅱ）$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=0,\\ x_1+x_2+bx_3=0\end{cases}$的解，但方程组（Ⅰ）与方程组（Ⅱ）不同解.设矩阵$\boldsymbol{A}$为方程组（Ⅰ）的系数矩阵，矩阵$\boldsymbol{B}$为方程组（Ⅱ）的系数矩阵，则$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=$________.

16. 设总体X的概率密度$f(x)=\begin{cases}\mu x, & 0\leqslant x<1,\\ \theta x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ μ，θ为未知参数且$\mu>0$，$\theta>0$，$Y=\mathrm{e}^X$，X

的样本观测值为0.1, 0.9, 1.2, 1.2, 则 $P\{Y<4\}$ 的最大似然估计值为________.

三、解答题：17~22小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本题满分10分)

计算 $\int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

18.(本题满分12分)

设曲面 $z=f(x,y)$ 过点 $(0,0,2)$ ，且 Δz 关于 x 的偏增量 $\Delta_x z=-2x\mathrm{e}^{-y}\cdot\Delta x+o(\Delta x)$ ，Δz 关于 y 的偏增量 $\Delta_y z=\mathrm{e}^{-y}(x^2-y-1)\Delta y+o(\Delta y)$ ，求 $z=f(x,y)$ 的表达式及 z 的极值.

19.(本题满分12分)

(1)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，证明存在 $\xi\in(a,b)$ ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3;$$

(2)设 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $g(-1)=g(1), g'(0)=0$，证明存在 $\eta\in(-1,1)$ ，使得 $g'''(\eta)=0$.

20.(本题满分12分)

设 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant 2x+2y\right\}$ ，求二重积分 $\iint\limits_D (x^2+x+y)\mathrm{d}\sigma$.

21.(本题满分12分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&5\\5&7&9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$.

(1)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

(2)求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

22.(本题满分12分)

设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}a\left(x^2+\dfrac{xy}{2}\right), & 0<x<1,0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1)求 a 的值；

(2) X, Y 是否相互独立，说明理由；

(3)计算 $P\left\{Y>1\,\middle|\,X=\frac{1}{2}\right\}$.

数学（三）预测卷（一）试题答案及评分参考

一、选择题

1. 答　应选D.

解　当$x\to 0^+$时，

$$\int_0^{x^2}(e^{t^2}+1)dt\sim\int_0^{x^2}2dt=2x^2,$$

$$\int_0^{x}\ln(1+\sqrt{t^3})dt\sim\int_0^{x}t^{\frac{3}{2}}dt=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$$

$$\int_0^{\sin x}\cos t^2dt\sim\int_0^{\sin x}1dt=\sin x\sim x,$$

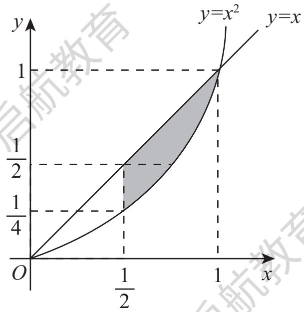
$$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\arcsin^3 t}\,dt\sim\int_0^{1-\cos x}t^{\frac{3}{2}}dt=\frac{2}{5}(1-\cos x)^{\frac{5}{2}}\sim\frac{\sqrt{2}}{20}x^5.$$

2. 答　应选A.

解　若该微分方程的解必有周期性，则解的形式只能为$y=A\cos\beta x+B\sin\beta x$，故对应的特征方程的根为$r_{1,2}=\pm\beta i$，此时，特征方程为$r^2+\beta^2=0$.故微分方程$y''+ay'+by=0$中的系数$a,b$需满足：$a=0,b=\beta^2>0$.

3. 答　应选B.

解　积分区域如图所示.交换积分次序，可得



$$\text{原式}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(ex-xe^x)dx$$

$$=\left[\frac{e}{2}x^2-(x-1)e^x\right]\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{3}{8}e-\frac{\sqrt{e}}{2}.$$

4. 答　应选A.

解　将$\arcsin x,\dfrac{1}{1+ax^2}$在$x=0$处泰勒展开，得

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)-x(1-ax^2+\cdots)=\left(\frac{1}{6}+a\right)x^3+\cdots,$$

由泰勒级数展开的唯一性，有$\frac{1}{6}+a=\frac{f'''(0)}{3!}$，即$\frac{1}{6}+a=\frac{1}{3}$，故$a=\frac{1}{6}$.

5.答　应选B.

解　先判别$\boldsymbol{\alpha}_4$可否由向量组(Ⅱ)线性表示.

因为$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示，则存在一组实数$k_1,k_2,k_3,k_4$，使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4 . \quad ①$$

若$k_4=0$，则$\boldsymbol{\beta}$可由向量组(Ⅰ)线性表示，与已知矛盾，故$k_4\neq 0$.从而有

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\frac{1}{k_4}(\boldsymbol{\beta}-k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_2\boldsymbol{\alpha}_2-k_3\boldsymbol{\alpha}_3),$$

即$\boldsymbol{\alpha}_4$可由向量组(Ⅱ)线性表示.

再判别$\boldsymbol{\alpha}_4$可否由向量组(Ⅰ)线性表示.

如果$\boldsymbol{\alpha}_4$可由向量组(Ⅰ)线性表示，则存在一组实数l_1,l_2,l_3，使得

$$\boldsymbol{\alpha}_4=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3 . \quad ②$$

将②式代入①式，得

$$\boldsymbol{\beta}=(k_1+k_4l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_4l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3+k_4l_3)\boldsymbol{\alpha}_3 .$$

这表示$\boldsymbol{\beta}$可由向量组(Ⅰ)线性表示，与已知矛盾，所以$\boldsymbol{\alpha}_4$不可由向量组(Ⅰ)线性表示.

6.答　应选B.

解　因为齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有两个线性无关的解向量，所以方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系所含向量个数$n-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$.于是，$r(\boldsymbol{A})\leqslant n-2$，由此得$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，可知任意$n$维列向量均是方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解.因此，方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解均是$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，选项B正确.选项A显然不正确.

对于选项C，D，由于方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系至少含有两个解，故$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有无穷多个非零解，与$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$也有无穷多个非零公共解.显然选项C，D均不正确.

7.答　应选C.

解　将向量$\boldsymbol{\beta}$表示为$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$的线性组合形式.由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$.因为$\lambda=2$是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$是矩阵$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda=2$的特征向

量，故向量$\boldsymbol{\beta}$也是矩阵$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda=2$的特征向量.则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=(2\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}2&2&-2\\4&0&4\\0&2&-4\end{pmatrix}.$$

8.答　应选A.

解　由题意可知$N_1\sim B\left(n,\frac{1}{4}\right)$，$N_2\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，$N_3\sim B\left(n,\frac{1}{4}\right)$.

由$N_1+N_2+N_3=n$，即$N_1+N_2=n-N_3$，可知$N_1+N_2\sim B\left(n,\frac{3}{4}\right)$.

$$D(N_1)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3n}{16}，D(N_2)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}，D(N_1+N_2)=n\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3n}{16}.$$

又$D(N_1+N_2)=D(N_1)+D(N_2)+2\mathrm{Cov}(N_1,N_2)$，得$\mathrm{Cov}(N_1,N_2)=-\frac{n}{8}$.所以

$$\rho_{N_1N_2}=\frac{\mathrm{Cov}(N_1,N_2)}{\sqrt{D(N_1)}\sqrt{D(N_2)}}=\frac{-\frac{n}{8}}{\sqrt{\frac{3n}{16}}\sqrt{\frac{n}{4}}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

9.答　应选D.

解　依题意知，$P\{X=k\}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}(k=0,1,\cdots)$，则$P\{X\leqslant1\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=\frac{2}{\mathrm{e}}$.

又$\frac{\upsilon_n(1)}{n}$为事件$\{X\leqslant1\}$在n次观测中出现的频率，当n充分大时，由伯努利大数定律，知

$$\frac{\upsilon_n(1)}{n}\xrightarrow{P}P\{X\leqslant1\}=\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

10.答　应选C.

解　依题意，$E(Z_{(a,b)})=aE(X)+bE(Y)=a\cdot\frac{\alpha}{2}+b\cdot\frac{3\alpha}{2}=\alpha$，即

$$a+3b=2. \tag{*}$$

又
$$D(Z_{(a,b)})=a^2D(X)+b^2D(Y)=a^2\cdot\frac{\alpha^2}{12}+b^2\cdot\frac{\alpha^2}{12}=\frac{\alpha^2}{12}(a^2+b^2),$$

且由(*)式知$a=2-3b$，故$D(Z_{(a,b)})=\frac{\alpha^2}{12}\left[(2-3b)^2+b^2\right]=\frac{\alpha^2}{6}(2-6b+5b^2)$.令

$$\frac{\mathrm{d}\left[D(Z_{(a,b)})\right]}{\mathrm{d}b}=\frac{\alpha^2}{6}(-6+10b)=0,$$

得 $b=\dfrac{3}{5}$，则 $a=\dfrac{1}{5}$.

二、填空题

11. 答　应填 $-\dfrac{1}{6\mathrm{e}}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{\int_0^{x^2}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}-1}{\mathrm{e}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\mathrm{e}x^3}=-\frac{1}{6\mathrm{e}}.$$

12. 答　应填 $y=x-1$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}=-1,$$

故斜渐近线方程为 $$y=x-1.$$

13. 答　应填 $\cos 1-\sin 1$.

解 $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$$
$$=\cos 1-\sin 1.$$

14. 答　应填 $\ln\left[(x-1)^2+4y^2\right]+\arctan\dfrac{2y}{x-1}=C$，$C$ 为任意常数.

解　将原方程写成 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-(x-1)+y}{(x-1)+4y},$$

令 $X=x-1$, $Y=y$, 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X$，$\mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\dfrac{-X+Y}{X+4Y}$, 即

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{\dfrac{Y}{X}-1}{\dfrac{4Y}{X}+1},$$

令 $u=\dfrac{Y}{X}$, 则有 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$, 此时原方程化为 $X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\dfrac{-1-4u^2}{4u+1}$, 此为可分离变量的微

分方程，即 $\frac{4u+1}{4u^2+1}\mathrm{d}u=-\frac{1}{X}\mathrm{d}X$，解得 $\ln\left[X^2(4u^2+1)\right]+\arctan 2u=C$.

将 $u=\frac{Y}{X}=\frac{y}{x-1}$，$X=x-1$ 代入，得方程的通解为 $\ln\left[(x-1)^2+4y^2\right]+\arctan\frac{2y}{x-1}=C$，$C$ 为任意常数.

15. **答** 应填 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\2&4&6\end{pmatrix}$.

解 由题意，得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&a\\1&1&a+1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&b\end{pmatrix}$，可知 $r(\boldsymbol{A})=2$，由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，可知 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解且 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{B})$，进而可得 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})=2$，又 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 不同解，故 $r(\boldsymbol{B})=1$，得 $b=2$.

又 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&a\\1&1&a+1\\1&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&a\\0&0&a-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，且 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=2$，故 $a=1$.

于是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\2&4&6\end{pmatrix}$.

16. **答** 应填 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\ln^2 2$.

解 由归一性 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，得

$$\int_0^1\mu x\mathrm{d}x+\int_1^2\theta x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mu+\frac{3}{2}\theta=1\text{，即 }\mu=2-3\theta.$$

根据 X 的样本观测值，知似然函数为

$$L=0.1\mu\cdot0.9\mu(1.2\theta)^2=0.129\,6\mu^2\theta^2=0.129\,6(2-3\theta)^2\theta^2,$$

从而有

$$\ln L=\ln 0.129\,6+2\ln(2-3\theta)+2\ln\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}(\ln L)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{-6}{2-3\theta}+\frac{2}{\theta}\overset{\text{令}}{=}0,$$

得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{3}$，且

$$P\{Y<4\}=P\{e^X<4\}=P\{X<2\ln 2\}$$

$$=\int_0^1 \mu x\mathrm{d}x+\int_1^{2\ln 2}\theta x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(2-3\theta)+\left(2\ln^2 2-\frac{1}{2}\right)\theta$$

$$=1+(2\ln^2 2-2)\theta .$$

根据最大似然估计的不变性原理，知 $P\{Y<4\}$ 的最大似然估计值为

$$1+\left(2\ln^2 2-2\right)\hat{\theta}=1+\frac{1}{3}\left(2\ln^2 2-2\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\ln^2 2 .$$

三、解答题

17.解　法一　$\displaystyle\int\frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+2}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}\mathrm{d}x .$

令 $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t$，则

$$\text{原式}=\int\frac{\frac{3}{4}\tan^2 t-\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t+\frac{1}{4}+2}{\frac{9}{16}\sec^4 t}\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t\mathrm{d}t \qquad \cdots\cdots 3\text{分}$$

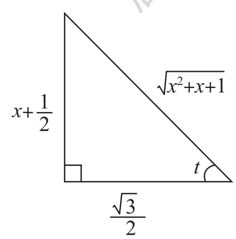
$$=\frac{16}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{4}\int\frac{\tan^2 t-\frac{2}{\sqrt{3}}\tan t+3}{\sec^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int\left(\sin^2 t-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\cdot\cos t+3\cos^2 t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int\left(1+2\cos^2 t-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\cos t\right)\mathrm{d}t \qquad \cdots\cdots 5\text{分}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(2t+\frac{\sin 2t}{2}-\frac{\sin^2 t}{\sqrt{3}}\right)+C_0. \qquad \cdots\cdots 7\text{分}$$

由 $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t$ 可得 $\tan t=\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$，如图所示，则



$\sin t=\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}$，$\cos t=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}$，代入得

$$原式=\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}+C_0$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{x+1}{x^2+x+1}+C（C为任意常数）.\qquad\cdots\cdots 10分$$

法二 $\displaystyle\int\frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2}+\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x.\qquad\cdots\cdots 4分$$

由 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$，可知

$$\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\cdot\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1},$$

由此得

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+2\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C_1,\qquad\cdots\cdots 7分$$

因此有

$$\int\frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2(x^2+x+1)}+\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C（C为任意常数）.\qquad\cdots\cdots 10分$$

18. **解** 由题设可知 $f_x'(x,y)=-2x\mathrm{e}^{-y}$，$f_y'(x,y)=\mathrm{e}^{-y}(x^2-y-1)$，$f(0,0)=2$.

等式 $f_x'(x,y)=-2x\mathrm{e}^{-y}$ 两边同时对 x 积分，得

$$f(x,y)=-x^2\mathrm{e}^{-y}+\varphi(y),\qquad\cdots\cdots 2分$$

则

$$f_y'(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-y}+\varphi'(y),\qquad\cdots\cdots 4分$$

由已知 $f_y'(x,y)=\mathrm{e}^{-y}(x^2-y-1)$，可得 $\varphi'(y)=-(y+1)\mathrm{e}^{-y}$.

$\varphi'(y)$ 对 y 积分，得 $\varphi(y)=(y+2)\mathrm{e}^{-y}+C$，则

$$f(x,y)=-x^2\mathrm{e}^{-y}+(y+2)\mathrm{e}^{-y}+C. \qquad \cdots\cdots 5\text{分}$$

由 $f(0,0)=2$ 可得 $C=0$，故 $z=f(x,y)=(-x^2+y+2)\mathrm{e}^{-y}$. ……6分

令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=-2x\mathrm{e}^{-y}=0, \\ f_y'(x,y)=(x^2-y-1)\mathrm{e}^{-y}=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=0, \\ y=-1. \end{cases}$ ……8分

又 $f_{xx}''(x,y)=-2\mathrm{e}^{-y}$，$f_{xy}''(x,y)=2x\mathrm{e}^{-y}$，$f_{yy}''(x,y)=(-x^2+y)\mathrm{e}^{-y}$，

则在点 $(0,-1)$ 处，$A=f_{xx}''(0,-1)=-2\mathrm{e}$，$B=f_{xy}''(0,-1)=0$，$C=f_{yy}''(0,-1)=-\mathrm{e}$，可得 $AC-B^2>0$，且 $A<0$. ……11分

故 $z=f(x,y)$ 在 $(0,-1)$ 处取得极大值，极大值为 $f(0,-1)=\mathrm{e}$. ……12分

19. **证** （1）由题可知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，故

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}(x-a)=f(x)(x-a)\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}-\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}-f'(x)\cdot\frac{(x-a)^2}{2}\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}+\int_a^{\frac{a+b}{2}} f''(x)\frac{(x-a)^2}{2}\mathrm{d}x$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{(b-a)^2}{8}+f''(\xi_1)\cdot\frac{(b-a)^3}{48}, \qquad ①$$

……3分

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}(x-b)=f(x)(x-b)\Big|_{\frac{a+b}{2}}^b-\int_{\frac{a+b}{2}}^b(x-b)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}-f'(x)\cdot\frac{(x-b)^2}{2}\Big|_{\frac{a+b}{2}}^b+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f''(x)\frac{(x-b)^2}{2}\mathrm{d}x$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{(b-a)^2}{8}+f''(\xi_2)\cdot\frac{(b-a)^3}{48}, \qquad ②$$

其中 ξ_1 介于 a 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间，ξ_2 介于 $\frac{a+b}{2}$ 与 b 之间. ……6分

①式与②式相加，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{24}$$

$$\xlongequal[\text{介值性}]{\text{导函数的}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24},$$

其中 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$. ……8分

(2) 由题可知, $g'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶连续导数, 由(1)知, 存在 $\eta\in(-1,1)$, 使

$$\int_{-1}^1 g'(x)\mathrm{d}x = g'\left(\frac{-1+1}{2}\right)(1+1)+\frac{g'''(\eta)}{24}(1+1)^3,$$

即 $g(1)-g(-1)=2g'(0)+\dfrac{g'''(\eta)}{3}$, 又因为 $g(-1)=g(1)$, $g'(0)=0$, 故 $g'''(\eta)=0$. ……12分

20. **解　法一**　令 $\begin{cases} x=1+r\cos\theta, \\ y=1+r\sin\theta, \end{cases}$ 则 $D=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}\right\}$, ……2分

故
$$\iint\limits_D (x^2+x+y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left[(1+r\cos\theta)^2+1+r\cos\theta+1+r\sin\theta\right]r\mathrm{d}r$$ ……5分

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left[3r+r^2(3\cos\theta+\sin\theta)+r^3\cos^2\theta\right]\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[3+\frac{2\sqrt{2}}{3}(3\cos\theta+\sin\theta)+\cos^2\theta\right]\mathrm{d}\theta$$ ……9分

$$=7\pi.$$ ……12分

法二　将 D 改写成 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant(\sqrt{2})^2\right\}$, 令 $u=x-1$, $v=y-1$, 则

$$\iint\limits_D (x^2+x+y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 2}\left[(u+1)^2+u+1+v+1\right]\mathrm{d}\sigma'$$ ……4分

$$=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 2}(u^2+3u+v+3)\mathrm{d}\sigma'=\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 2}u^2\mathrm{d}\sigma'+3\cdot 2\pi$$ ……6分

$$=6\pi+\frac{1}{2}\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 2}(u^2+v^2)\mathrm{d}\sigma'=6\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cdot r\mathrm{d}r$$ ……9分

$$=6\pi+\pi$$

$$=7\pi.$$ ……12分

21.**解** (1) $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$，因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-2&\lambda-4&-6\\-3&-6&\lambda-9\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-14),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=14$，$\lambda_2=\lambda_3=0$. ……3分

当 $\lambda_1=14$ 时，解方程组 $(14\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$；

……5分

当 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 时，解方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$，正交单位化得 $\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{70}}\\-\frac{6}{\sqrt{70}}\\\frac{5}{\sqrt{70}}\end{pmatrix}$. ……7分

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}&-\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{3}{\sqrt{70}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{6}{\sqrt{70}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}&0&\frac{5}{\sqrt{70}}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，且

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}14&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

故在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，$f(x_1,x_2,x_3)$ 可化为标准形 $14y_1^2$. ……8分

(2) 由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 及(1)，得 $14y_1^2=0$，故 $y_1=0$. 又 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，从而 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解

满足$x_1+2x_2+3x_3=0$． ……10分

故$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$，其中$k_1$，$k_2$为任意常数． ……12分

22.解 （1）$1=\iint\limits_{\mathbf{R}^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y=a\int_0^1(2x^2+x)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}a$，可得$a=\frac{6}{7}$．

……2分

（2）当$0<x<1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{6}{7}\int_0^2\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{6}{7}(2x^2+x)$；

当$x\leqslant 0$或$x\geqslant 1$时，$f_X(x)=0$．

故$f_X(x)=\begin{cases}\frac{6}{7}(2x^2+x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ ……5分

当$0<y<2$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\frac{6}{7}\int_0^1\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{7}+\frac{3}{14}y$；

当$y\leqslant 0$或$y\geqslant 2$时，$f_Y(y)=0$．

故$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{7}+\frac{3}{14}y, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ ……8分

因为$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以X与Y不相互独立． ……9分

（3）当$y\leqslant 0$或$y\geqslant 2$时，$f_{Y|X}\left(y\middle|x=\frac{1}{2}\right)=0$，当$0<y<2$时，

$$f_{Y|X}\left(y\middle|x=\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{2},y\right)}{f_X\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{14}(1+y)}{\frac{6}{7}}=\frac{1+y}{4},$$ ……11分

于是，
$$P\left\{Y>1\middle|X=\frac{1}{2}\right\}=\int_1^2\frac{1+y}{4}\mathrm{d}y=\frac{5}{8}.$$ ……12分

【注】由于$P\left\{X=\frac{1}{2}\right\}=0$，故不能用条件概率公式$P\left\{Y>1\middle|X=\frac{1}{2}\right\}=\dfrac{P\left\{Y>1,X=\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X=\frac{1}{2}\right\}}$．