2026 年全国硕士研究生招生考试

数学（一）预测卷（一）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

（以下信息考生必须认真填写）

考生编号															
考生姓名															

一、选择题：1~10小题，每小题5分，共50分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的．

1.当$x\to 0^+$时，下列无穷小量中，最高阶的是

A. $\int_0^{x^2}(e^{t^2}+1)dt$.　　B. $\int_0^{x}\ln(1+\sqrt{t^3})dt$.

C. $\int_0^{\sin x}\cos t^2 dt$.　　D. $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\arcsin^3 t}\,dt$.

2.若微分方程$y''+ay'+by=0$的解在$(-\infty,+\infty)$上必为周期函数，则

A. $a=0,b>0$.　B. $a=0,b<0$.　C. $a\neq 0,b<0$.　D. $a\neq 0,b>0$.

3. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx=$

A. $\frac{3e}{4}-\frac{\sqrt{e}}{2}$.　B. $\frac{3e}{8}-\frac{\sqrt{e}}{2}$.　C. $\frac{3e}{4}+\frac{\sqrt{e}}{2}$.　D. $\frac{3e}{8}+\frac{\sqrt{e}}{2}$.

4.设$f(x)=\arcsin x-\frac{x}{1+ax^2}$，$f'''(0)=2$，则$a=$

A. $\frac{1}{6}$.　B. $\frac{1}{4}$.　C. $\frac{1}{3}$.　D. $\frac{1}{2}$.

5.设向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示，但不可由向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，记向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$，则

A. $\boldsymbol{\alpha}_4$不可由向量组(Ⅰ)线性表示，也不可由向量组(Ⅱ)线性表示.

B. $\boldsymbol{\alpha}_4$不可由向量组(Ⅰ)线性表示，但可由向量组(Ⅱ)线性表示.

C. $\boldsymbol{\alpha}_4$可由向量组(Ⅰ)线性表示，也可由向量组(Ⅱ)线性表示.

D. $\boldsymbol{\alpha}_4$可由向量组(Ⅰ)线性表示，但不可由向量组(Ⅱ)线性表示.

6.设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有两个线性无关的解，则

A. $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解均是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.　B. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解均是$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解.

C. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$没有非零公共解.　D. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$仅有两个非零公共解.

7.设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$的元素全大于零，且每行元素之和等于1，以下结论：

①$\lambda=1$是$\boldsymbol{A}$的特征值；

②$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解；

③$\boldsymbol{A}$的每一个特征值λ都满足$|\lambda|\leqslant 1$.

正确结论的个数为

A. 0.　B. 1.　C. 2.　D. 3.

8. 设总体 X 的概率分布如下.

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

从总体 X 中抽取 n 个简单随机样本，N_1 表示 n 个样本中取到 -1 的个数，N_2 表示 n 个样本中取到 0 的个数，N_3 表示 n 个样本中取到 1 的个数，则 N_1 与 N_2 的相关系数为

A. -1.　　B. 1.　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{25}$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，考虑假设检验问题：$H_0:\mu\leqslant 10$，$H_1:\mu>10$，若该检验问题的拒绝域为 $W=\{\overline{X}>20\}$，其中 $\overline{X}=\frac{1}{25}\sum\limits_{i=1}^{25}X_i$，当 $\mu=20.5$ 时，该检验犯第二类错误的概率为 $1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$，则 $\sigma=$

A. 5.　　B. 6.　　C. 7.　　D. 8.

10. 设总体 $X\sim U(0,\alpha)$，$Y\sim U(\alpha,2\alpha)$，$\alpha>0$ 为未知参数. X,Y 相互独立. 记 $Z_{(a,b)}=aX+bY$，则当 $Z_{(k_1,k_2)}$ 是 α 的最有效的估计量时，有

A. $k_1=\frac{1}{3}$，$k_2=\frac{2}{3}$.　　B. $k_1=\frac{2}{3}$，$k_2=\frac{1}{3}$.　　C. $k_1=\frac{1}{5}$，$k_2=\frac{3}{5}$.　　D. $k_1=\frac{1}{2}$，$k_2=\frac{1}{2}$.

二、填空题：11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. $\mathbf{grad}\left(x^2y+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(1,1,2)}=$________.

12. 曲线 $y=x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}}$ 的斜渐近线方程为________.

13. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{(2n+1)!}=$________.

14. 微分方程 $(x-y-1)\mathrm{d}x+(x+4y-1)\mathrm{d}y=0$ 的通解为________.

15. 已知方程组（Ⅰ）$\begin{cases}x_2+ax_3=0,\\x_1+x_2+(a+1)x_3=0\end{cases}$ 的解均是方程组（Ⅱ）$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=0,\\x_1+x_2+bx_3=0\end{cases}$ 的解，但方程组（Ⅰ）与方程组（Ⅱ）不同解. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为方程组（Ⅰ）的系数矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为方程组（Ⅱ）的系数矩阵，则 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=$________.

16. 设总体 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\mu x, & 0\leqslant x<1,\\ \theta x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ μ，θ 为未知参数且 $\mu>0$，$\theta>0$，$Y=\mathrm{e}^X$，X 的样本观测值为 0.1，0.9，1.2，1.2，则 $P\{Y<4\}$ 的最大似然估计值为________.

三、解答题：17~22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本题满分 10 分）

设曲面 $z=f(x,y)$ 过点 $(0,0,2)$，且 Δz 关于 x 的偏增量 $\Delta_x z=-2xe^{-y}\cdot\Delta x+o(\Delta x)$，$\Delta z$ 关于 y 的偏增量 $\Delta_y z=e^{-y}(x^2-y-1)\Delta y+o(\Delta y)$，求 $z=f(x,y)$ 的表达式及 z 的极值．

18.（本题满分 12 分）

设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ \ln x, & x>1,\end{cases}$ $g(x)=e^{x-1}$.

（1）求 $\varphi(x)=f[g(x)]$；

（2）求在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 y，使之在 $(-\infty,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内满足微分方程 $y'-y=\varphi(x)$，且 $y(0)=0$.

19.（本题满分 12 分）

（1）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3\text{；}$$

（2）设 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $g(-1)=g(1),g'(0)=0$，证明存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $g'''(\eta)=0$．

20.（本题满分 12 分）

设非负函数 $f(x)$ 有连续的二阶导数，$f(x)$ 满足 $f(0)=1$，$f'(0)=2$，对于任意的位于 xOy 面上方的分片光滑闭曲面 Σ 的内侧，都有 $\oiint\limits_{\Sigma} z^2 f'(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-3yz^2\sqrt{f(x)}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$．求 $f(x)$．

21.（本题满分 12 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

（1）是否存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$？若存在，求出 $\boldsymbol{Q}$；若不存在，说明理由．

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BP}$ 均为对角矩阵．

22.（本题满分 12 分）

设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}a\left(x^2+\dfrac{xy}{2}\right), & 0<x<1,0<y<2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

（1）求 a 的值；

（2）X,Y 是否相互独立，说明理由；

（3）计算 $P\left\{Y>1\,\middle|\,X=\dfrac{1}{2}\right\}$．

数学（一）预测卷（一）试题答案及评分参考

一、选择题

1.答　应选D.

解　当$x\to 0^+$时，

$$\int_0^{x^2}(e^{t^2}+1)dt\sim\int_0^{x^2}2dt=2x^2,$$

$$\int_0^{x}\ln(1+\sqrt{t^3})dt\sim\int_0^{x}t^{\frac{3}{2}}dt=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$$

$$\int_0^{\sin x}\cos t^2dt\sim\int_0^{\sin x}1dt=\sin x\sim x,$$

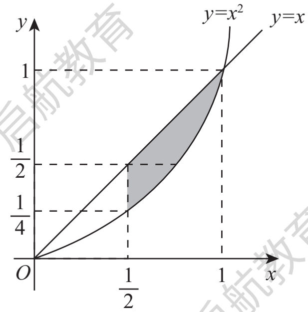
$$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\arcsin^3 t}\,dt\sim\int_0^{1-\cos x}t^{\frac{3}{2}}dt=\frac{2}{5}(1-\cos x)^{\frac{5}{2}}\sim\frac{\sqrt{2}}{20}x^5.$$

2.答　应选A.

解　若该微分方程的解必有周期性，则解的形式只能为$y=A\cos\beta x+B\sin\beta x$，故对应的特征方程的根为$r_{1,2}=\pm\beta i$，此时，特征方程为$r^2+\beta^2=0$.故微分方程$y''+ay'+by=0$中的系数$a,b$需满足：$a=0,b=\beta^2>0$.

3.答　应选B.

解　积分区域如图所示.交换积分次序，可得



$$原式=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(ex-xe^x)dx$$

$$=\left[\frac{e}{2}x^2-(x-1)e^x\right]\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{3}{8}e-\frac{\sqrt{e}}{2}.$$

4.答　应选A.

解　将$\arcsin x,\dfrac{1}{1+ax^2}$在$x=0$处泰勒展开，得

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)-x(1-ax^2+\cdots)=\left(\frac{1}{6}+a\right)x^3+\cdots,$$

由泰勒级数展开的唯一性，有 $\frac{1}{6}+a=\frac{f'''(0)}{3!}$，即 $\frac{1}{6}+a=\frac{1}{3}$，故 $a=\frac{1}{6}$.

5.答　应选B.

解　先判别 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由向量组(Ⅱ)线性表示.

因为 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，则存在一组实数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4 . \tag{①}$$

若 $k_4=0$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组(Ⅰ)线性表示，与已知矛盾，故 $k_4\neq 0$.从而有

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\frac{1}{k_4}(\boldsymbol{\beta}-k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_2\boldsymbol{\alpha}_2-k_3\boldsymbol{\alpha}_3),$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由向量组(Ⅱ)线性表示.

再判别 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由向量组(Ⅰ)线性表示.

如果 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由向量组(Ⅰ)线性表示，则存在一组实数 l_1,l_2,l_3，使得

$$\boldsymbol{\alpha}_4=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3 . \tag{②}$$

将②式代入①式，得

$$\boldsymbol{\beta}=(k_1+k_4l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_4l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3+k_4l_3)\boldsymbol{\alpha}_3 .$$

这表示 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组(Ⅰ)线性表示，与已知矛盾，所以 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不可由向量组(Ⅰ)线性表示.

6.答　应选B.

解　因为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解，所以方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量个数 $n-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$.于是，$r(\boldsymbol{A})\leqslant n-2$，由此得 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，可知任意 n 维列向量均是方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.因此，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，选项B正确.选项A显然不正确.

对于选项C，D，由于方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系至少含有两个解向量，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多个非零解，与 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 也有无穷多个非零公共解.显然选项C，D均不正确.

7.答　应选D.

解　取 n 维列向量 $\boldsymbol{x}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，显然 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{x}$，所以 $\lambda=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，①正确，②正确.

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个特征值，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是对应的特征向量，则有 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，即 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda x_i(i=1,2,\cdots,n)$.

取 $x_k = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|x_i|\}$，则 $x_k > 0$，于是

$$|\lambda x_k| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|\cdot|x_j| \leqslant |x_k|\cdot\left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\right| = |x_k|,$$

由此推出 $|\lambda|\leqslant 1$，③正确.

8. 答　应选C.

解　由题意可知 $N_1 \sim B\left(n,\frac{1}{4}\right)$，$N_2 \sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，$N_3 \sim B\left(n,\frac{1}{4}\right)$.

由 $N_1+N_2+N_3=n$，即 $N_1+N_2=n-N_3$，可知 $N_1+N_2\sim B\left(n,\frac{3}{4}\right)$.

$$D(N_1)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3n}{16},\ D(N_2)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4},\ D(N_1+N_2)=n\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3n}{16}.$$

又 $D(N_1+N_2)=D(N_1)+D(N_2)+2\mathrm{Cov}(N_1,N_2)$，得 $\mathrm{Cov}(N_1,N_2)=-\frac{n}{8}$. 所以

$$\rho_{N_1N_2}=\frac{\mathrm{Cov}(N_1,N_2)}{\sqrt{D(N_1)}\sqrt{D(N_2)}}=\frac{-\frac{n}{8}}{\sqrt{\frac{3n}{16}}\sqrt{\frac{n}{4}}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

9. 答　应选A.

解　假设检验中犯第二类错误的概率为当 H_0 为假时却接受 H_0 的概率，即在 $\mu>10$ 的情况下，接受 H_0 的概率，而当 $\mu=20.5$ 时，$P\left\{\overline{X}\leqslant 20\right\}=1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$，则

$$P\left\{\overline{X}\leqslant 20\right\}=P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant\frac{20-20.5}{\sigma/5}\right\}=\Phi\left(-\frac{2.5}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{2.5}{\sigma}\right),$$

故 $\frac{2.5}{\sigma}=\frac{1}{2}$，则 $\sigma=5$.

10. 答　应选C.

解　当 $a=k_1$，$b=k_2$ 时，$Z_{(k_1,k_2)}=k_1X+k_2Y$.

依题意，$Z_{(k_1,k_2)}$ 首先是无偏估计量，即 $E(Z_{(k_1,k_2)})=k_1E(X)+k_2E(Y)=k_1\cdot\frac{\alpha}{2}+k_2\cdot\frac{3\alpha}{2}=\alpha$，得

$$k_1+3k_2=2. \tag{*}$$

又
$$D(Z_{(k_1,k_2)})=k_1^2D(X)+k_2^2D(Y)=k_1^2\cdot\frac{\alpha^2}{12}+k_2^2\cdot\frac{\alpha^2}{12}=\frac{\alpha^2}{12}(k_1^2+k_2^2),$$

且由(*)式知 $k_1=2-3k_2$，故 $D(Z_{(k_1,k_2)})=\frac{\alpha^2}{12}\left[(2-3k_2)^2+k_2^2\right]=\frac{\alpha^2}{6}(2-6k_2+5k_2^2)$.

令 $\frac{\mathrm{d}\left[D(Z_{(k_1,k_2)})\right]}{\mathrm{d}k_2}=\frac{\alpha^2}{6}(-6+10k_2)=0$，得 $k_2=\frac{3}{5}$，则 $k_1=\frac{1}{5}$.

二、填空题

11.答　应填 $2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

解　令 $u=x^2y+\frac{z}{y}$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2-\frac{z}{y^2}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{y}$，于是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,2)}=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,2)}=-1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,2)}=1 .$$

故 $\mathbf{grad}\, u\big|_{(1,1,2)}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

12.答　应填 $y=x-1$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x+1}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}=-1,$$

故斜渐近线方程为

$$y=x-1 .$$

13.答　应填 $\cos 1-\sin 1$.

解
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$$
$$=\cos 1-\sin 1 .$$

14.答　应填 $\ln\left[(x-1)^2+4y^2\right]+\arctan\frac{2y}{x-1}=C$，$C$ 为任意常数.

解　将原方程写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-(x-1)+y}{(x-1)+4y},$$

令 $X=x-1$，$Y=y$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X$，$\mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$，原方程化为 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{-X+Y}{X+4Y}$，即

$$\frac{dY}{dX}=\frac{\frac{Y}{X}-1}{\frac{4Y}{X}+1},$$

令 $u=\frac{Y}{X}$，则有 $\frac{dY}{dX}=u+X\frac{du}{dX}$，此时原方程化为 $X\frac{du}{dX}=\frac{-1-4u^2}{4u+1}$，此为可分离变量的微分方程，即 $\frac{4u+1}{4u^2+1}du=-\frac{1}{X}dX$，解得 $\ln\left[X^2(4u^2+1)\right]+\arctan 2u=C$.

将 $u=\frac{Y}{X}=\frac{y}{x-1}, X=x-1$ 代入，得方程的通解为

$$\ln\left[(x-1)^2+4y^2\right]+\arctan\frac{2y}{x-1}=C,\ C\text{为任意常数}.$$

15.答　应填 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\2&4&6\end{pmatrix}$.

解　由题意，得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&a\\1&1&a+1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&b\end{pmatrix}$，可知 $r(\boldsymbol{A})=2$. 由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，可知 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解且 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{B})$，进而可得 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})=2$，又 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 不同解，故 $r(\boldsymbol{B})=1$，得 $b=2$.

又 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&a\\1&1&a+1\\1&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&a\\0&0&a-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，且 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=2$，故 $a=1$.

于是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\2&4&6\end{pmatrix}$.

16.答　应填 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\ln^2 2$.

解　由归一性 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，得

$$\int_0^1\mu x dx+\int_1^2\theta x dx=\frac{1}{2}\mu+\frac{3}{2}\theta=1,\ \text{即}\ \mu=2-3\theta.$$

根据 X 的样本观测值，知似然函数为

$$L=0.1\mu\cdot 0.9\mu(1.2\theta)^2=0.129\,6\mu^2\theta^2=0.129\,6(2-3\theta)^2\theta^2,$$

从而有 $$\ln L=\ln 0.129\,6+2\ln(2-3\theta)+2\ln\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}(\ln L)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{-6}{2-3\theta}+\frac{2}{\theta}\overset{令}{=}0,$$

得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{3}$，且

$$P\{Y<4\}=P\{\mathrm{e}^X<4\}=P\{X<2\ln 2\}$$

$$=\int_0^1\mu x\mathrm{d}x+\int_1^{2\ln 2}\theta x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(2-3\theta)+\left(2\ln^2 2-\frac{1}{2}\right)\theta$$

$$=1+(2\ln^2 2-2)\theta.$$

根据最大似然估计的不变性原理，知 $P\{Y<4\}$ 的最大似然估计值为

$$1+\left(2\ln^2 2-2\right)\hat{\theta}=1+\frac{1}{3}\left(2\ln^2 2-2\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\ln^2 2.$$

三、解答题

17.**解** 由题设可知 $f_x'(x,y)=-2x\mathrm{e}^{-y}$，$f_y'(x,y)=\mathrm{e}^{-y}(x^2-y-1)$，$f(0,0)=2$.

等式 $f_x'(x,y)=-2x\mathrm{e}^{-y}$ 两边同时对 x 积分，得

$$f(x,y)=-x^2\mathrm{e}^{-y}+\varphi(y),$$ ……2分

则 $$f_y'(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-y}+\varphi'(y),$$

由已知 $f_y'(x,y)=\mathrm{e}^{-y}(x^2-y-1)$，可得 $\varphi'(y)=-(y+1)\mathrm{e}^{-y}$. ……3分

$\varphi'(y)$ 对 y 积分，得 $\varphi(y)=(y+2)\mathrm{e}^{-y}+C$，则

$$f(x,y)=-x^2\mathrm{e}^{-y}+(y+2)\mathrm{e}^{-y}+C.$$

由 $f(0,0)=2$ 可得 $C=0$，故 $z=f(x,y)=(-x^2+y+2)\mathrm{e}^{-y}$. ……5分

令 $\begin{cases}f_x'(x,y)=-2x\mathrm{e}^{-y}=0,\\ f_y'(x,y)=(x^2-y-1)\mathrm{e}^{-y}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\ y=-1.\end{cases}$ ……7分

又 $$f_{xx}''(x,y)=-2\mathrm{e}^{-y},\ f_{xy}''(x,y)=2x\mathrm{e}^{-y},\ f_{yy}''(x,y)=(-x^2+y)\mathrm{e}^{-y},$$

则在点 $(0,-1)$ 处，$A=f_{xx}''(0,-1)=-2\mathrm{e}$，$B=f_{xy}''(0,-1)=0$，$C=f_{yy}''(0,-1)=-\mathrm{e}$，可得 $AC-B^2>0$，且 $A<0$. ……9分

故 $z=f(x,y)$ 在 $(0,-1)$ 处取得极大值，极大值为 $f(0,-1)=\mathrm{e}$. ……10分

18.**解** （1）
$$\varphi(x)=f[g(x)]=\begin{cases}g(x), & g(x)<1,\\ \ln g(x), & g(x)>1\end{cases}$$ ……2分

$$=\begin{cases}e^{x-1}, & x<1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$$ ……4分

（2）当$x<1$时，$y'-y=e^{x-1}$，根据一阶线性微分方程的通解公式，得

$$y=e^{\int dx}\left[\int e^{x-1}e^{\int(-1)dx}dx+C_1\right]$$

$$=e^{x}\left(\frac{x}{e}+C_1\right).$$ ……6分

由$y(0)=0$，得$C_1=0$，即$y=xe^{x-1}$，且由题设知$y(1)=\lim\limits_{x\to1^-}xe^{x-1}=1$．

当$x>1$时，$y'-y=x-1$，根据一阶线性微分方程的通解公式，得

$$y=e^{\int dx}\left[\int(x-1)e^{\int(-1)dx}dx+C_2\right]$$

$$=e^{x}(-xe^{-x}+C_2)=-x+C_2e^{x}.$$ ……9分

由题设知$\lim\limits_{x\to1^+}y(x)=1$，得$C_2=2e^{-1}$，故$y=-x+2e^{x-1}$．

综上，$y=\begin{cases}xe^{x-1}, & x\leqslant1,\\ -x+2e^{x-1}, & x>1.\end{cases}$ ……12分

19.**证** （1）由题设知，$f(x)$在$[a,b]$上具有二阶连续导数，故

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)d(x-a)=f(x)(x-a)\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}-\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)f'(x)dx$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}-f'(x)\cdot\frac{(x-a)^2}{2}\Bigg|_a^{\frac{a+b}{2}}+\int_a^{\frac{a+b}{2}}f''(x)\frac{(x-a)^2}{2}dx$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{(b-a)^2}{8}+f''(\xi_1)\cdot\frac{(b-a)^3}{48},\qquad ①$$

……3分

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}f(x)dx=\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}f(x)d(x-b)=f(x)(x-b)\Big|_{\frac{a+b}{2}}^{b}-\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)f'(x)dx$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}-f'(x)\cdot\frac{(x-b)^2}{2}\Bigg|_{\frac{a+b}{2}}^{b}+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}f''(x)\frac{(x-b)^2}{2}\mathrm{d}x$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{(b-a)^2}{8}+f''(\xi_2)\cdot\frac{(b-a)^3}{48}, \qquad ②$$

其中ξ_1介于a与$\frac{a+b}{2}$之间，ξ_2介于$\frac{a+b}{2}$与b之间. ……6分

①式与②式相加，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{24}$$

$$\xlongequal[\text{介值性}]{\text{导函数的}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24},$$

其中$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$. ……8分

(2)由题可知，$g'(x)$在$[-1,1]$上具有二阶连续导数，由(1)知，存在$\eta\in(-1,1)$，使

$$\int_{-1}^{1}g'(x)\mathrm{d}x=g'\left(\frac{-1+1}{2}\right)(1+1)+\frac{g'''(\eta)}{24}(1+1)^3,$$

即$g(1)-g(-1)=2g'(0)+\frac{g'''(\eta)}{3}$，又因为$g(-1)=g(1),g'(0)=0$，故$g'''(\eta)=0$. ……12分

20.**分析** 根据高斯公式，$\oiint\limits_{\Sigma}z^2f'(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-3yz^2\sqrt{f(x)}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iiint\limits_{\Omega}\left[f''(x)-3\sqrt{f(x)}\right]z^2\mathrm{d}v=0$，

由此可以推出被积函数$\left[f''(x)-3\sqrt{f(x)}\right]z^2=0$，从而得到微分方程$f''(x)-3\sqrt{f(x)}=0$.

解 根据高斯公式，有

$$-\iiint\limits_{\Omega}\left[f''(x)-3\sqrt{f(x)}\right]z^2\mathrm{d}v=0,$$

其中Ω是Σ围成的空间区域. ……3分

由Ω的任意性及$z^2>0$，可知

$$f''(x)-3\sqrt{f(x)}\equiv0. \qquad \text{……4分}$$

令$y=f(x)$，$y'=f'(x)=p$，则$y''=f''(x)=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入上式，得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=3\sqrt{y}, \qquad \text{……7分}$$

解得 $$p^2=4y^{\frac{3}{2}}+C_1.$$ ……9分

由初始条件 $f(0)=1$，$f'(0)=2$，得 $C_1=0$．因此 $\left[f'(x)\right]^2=4f^{\frac{3}{2}}(x)$，即 $f'(x)=2f^{\frac{3}{4}}(x)$，解得 $4f^{\frac{1}{4}}(x)=2x+C_2$． ……11分

再由初始条件 $f(0)=1$，得 $C_2=4$，所以 $f(x)=\dfrac{(x+2)^4}{16}$． ……12分

21.**解** （1）由于 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式 $d_1>0$，$d_2=1>0$，$d_3=1>0$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{A}$ 正定；$\boldsymbol{B}$ 的一阶顺序主子式为0，故 $\boldsymbol{B}$ 非正定，于是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似，故不存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$． ……4分

（2）由 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,3]{r_i-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[j=2,3]{c_j-c_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$，令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

于是有 $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{E}$． ……6分

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{B}_1$ 对应的实二次型为 $f=2x_2^2+2x_1x_3$，令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_3,\\x_3=y_1-y_3,\\x_2=y_2,\end{cases}$ 则 $f=2y_1^2+2y_2^2-2y_3^2$．其中

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y}$，且

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-2\end{pmatrix}\boldsymbol{y},$$

即 $\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-2\end{pmatrix}$． ……9分

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&-1&2\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-2\end{pmatrix}.$$ ……12分

【注】本题是两个具体型矩阵(一个正定矩阵,一个对称矩阵)同时相似对角化的问题,解法众多,如在求$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$的过程中均可用正交变换法.此题综合性强,思维容量大,解题角度多,是一道优秀的试题.

22.解 (1) $1=\iint\limits_{\mathbf{R}^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y=a\int_0^1(2x^2+x)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}a$,可得$a=\frac{6}{7}$.

……2分

(2)当$0<x<1$时,$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{6}{7}\int_0^2\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{6}{7}(2x^2+x)$;

当$x\leqslant 0$或$x\geqslant 1$时,$f_X(x)=0$.

故$f_X(x)=\begin{cases}\frac{6}{7}(2x^2+x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ ……5分

当$0<y<2$时,$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\frac{6}{7}\int_0^1\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{7}+\frac{3}{14}y$;

当$y\leqslant 0$或$y\geqslant 2$时,$f_Y(y)=0$.

故$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{7}+\frac{3}{14}y, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ ……8分

因为$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,所以X与Y不相互独立. ……9分

(3)当$y\leqslant 0$或$y\geqslant 2$时,$f_{Y|X}\left(y\middle|x=\frac{1}{2}\right)=0$,当$0<y<2$时,

$$f_{Y|X}\left(y\middle|x=\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{2},y\right)}{f_X\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{14}(1+y)}{\frac{6}{7}}=\frac{1+y}{4},$$ ……11分

于是，$$P\left\{Y>1 \middle| X=\frac{1}{2}\right\}=\int_1^2 \frac{1+y}{4}\,\mathrm{d}y=\frac{5}{8}.$$ ……12分

【注】由于 $P\left\{X=\frac{1}{2}\right\}=0$，故不能用条件概率公式 $P\left\{Y>1 \middle| X=\frac{1}{2}\right\}=\dfrac{P\left\{Y>1, X=\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X=\frac{1}{2}\right\}}$.