2025 考研数学（三） 真题

试卷及解析

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．在 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小量中与 x 等价的是

A. $e^{-\sin x}-1$.　　B. $\sqrt{x+1}-\cos x$.　　C. $1-\cos\sqrt{2x}$.　　D. $1-\frac{\ln(1+x)}{x}$.

【答案】C

【解析】$e^{-\sin x}-1\sim-\sin x\sim-x$，A 不对.

$\sqrt{x+1}-\cos x\sim\frac{1}{2}x$，B 不对.

$1-\cos\sqrt{2x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{2x})^2=x$，C 对.

$$1-\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x}=\frac{x}{2}+o(x)$$，D 不对.

2．已知函数 $f\left(x\right)=\int_0^x e^{t^2}\sin t\mathrm{d}t$， $g\left(x\right)=\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\cdot\sin^2 x$，则

A． $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的极值点，也是 $g\left(x\right)$ 的极值点.

B． $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的极值点，$\left(0,0\right)$ 是曲线 $y=g\left(x\right)$ 的拐点.

C． $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的极值点，$\left(0,0\right)$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点.

D． $\left(0,0\right)$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点，$\left(0,0\right)$ 也是曲线 $y=g\left(x\right)$ 的拐点.

【答案】B

【解析】$f'(x)=e^{x^2}\sin x, f''(x)=2xe^{x^2}\sin x+e^{x^2}\cos x$，

$f'(0)=0, f''(0)=1>0$.

$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点.

又 $g'(x)=\mathrm{e}^{x^2}\sin^2 x+\sin 2x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，

$$g''(x)=2\mathrm{e}^{x^2}\sin 2x+2x\mathrm{e}^{x^2}\sin^2 x+2\cos 2x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t,$$

$g'(0)=0,g''(0)=0$，$g''(x)$ 在 $x=0$ 的左右邻域变号，则 $(0,0)$ 是 $y=g(x)$ 的拐点.

3．已知 k 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right]$

A.绝对收敛. B.条件收敛. C.发散. D.敛散性与 k 的取值有关.

【答案】B

【解析】当 $k=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 条件收敛；

当 $k\neq 0$ 时，原级数中 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 为条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ 绝对收敛.

故原级数条件收敛.

4．设函数 $f(x)$ 连续，$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x=$

A. $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$. B. $\int_0^1(x+1)f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^1(x-1)f(x)\mathrm{d}x$. D. $\int_0^1(1-x)f(x)\mathrm{d}x$.

【答案】D

【解析】$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^y f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x\Big|_0^1-\int_0^1 y\cdot f(y)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 yf(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(1-x)f(x)\mathrm{d}x.$$

5．$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{\beta}$ 是 m 维非零列向量，若 $\boldsymbol{A}$ 有 k 阶非零子式，则

A. 当 $k=m$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解. B. 当 $k=m$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

C. 当 $k<m$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解. D. 当 $k<m$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

【答案】A

【解析】$r(\boldsymbol{A})\geqslant k$，若 $k=m$，则 $r(\boldsymbol{A})=m, r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=m$，故 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=m$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解.

6．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，则“ $\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2$ ”可对角化是“ $\boldsymbol{A}$ 可对角化”的

A.充分但不必要条件　　B.必要但不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】令 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2$，若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则 $\boldsymbol{A}$ 中有 n 个线性无关的特征向量，故 $f(\boldsymbol{A})$ 有 n 个线性无关的特征向量，故 $f(\boldsymbol{A})$ 可对角化；

若 $f(\boldsymbol{A})$ 可对角化，取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$f(\boldsymbol{A})$ 可对角化， $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

综上为必要不充分条件，选 B.

7．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&a\end{pmatrix}$，若 $f(x,y)=\left|x\boldsymbol{A}+y\boldsymbol{B}\right|$ 是正定二次型，则 a 的取值范围是

A. $\left(0,2-\sqrt{3}\right)$　　B. $\left(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right)$

C. $\left(2+\sqrt{3},4\right)$　　D. $\left(0,4\right)$

【答案】B

【解析】 $f(x,y)=-a\left(x^2-y^2\right)-\left(2xy-4x^2\right)=(4-a)x^2+ay^2-2xy$

$$=(x,y)\begin{pmatrix}4-a&-1\\-1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4-a>0,\\ \begin{vmatrix}4-a&-1\\-1&a\end{vmatrix}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<4,\\ 2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}\end{cases}$$，得 $a\in(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$. 选 B.

8．设随机变量 X 服从正态分布 $N\left(-1,1\right)$，Y 服从正态分布 $N\left(1,2\right)$，若 X 与 $X+2Y$ 不相关，则 X 与 $X-Y$ 的相关系数为

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

【答案】D

【解析】$\mathrm{Cov}(X,X+2Y)\ =\mathrm{Cov}(X,X)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=DX+2\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=-\frac{1}{2}DX=-\frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{Cov}(X,X-Y)=\mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)=DX-\mathrm{Cov}(X,Y)\ =1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$D(X-Y)=DX+DY-2\mathrm{Cov}(X,Y)=1+2-2\left(-\frac{1}{2}\right)=4,$$

$$DX=1,$$

所以 $\rho_{X,X-Y}=\dfrac{\frac{3}{2}}{2\times1}=\dfrac{3}{4}$.

9．设 $X_1,X_2,\cdots,X_{20}$ 是来自总体 $B\left(1,0.1\right)$ 的简单随机样本.令 $T=\sum\limits_{i=1}^{20}X_i$，利用泊松分布近似表示二项分布的方法可得 $P\left\{T\le1\right\}\approx$

A. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.　　B. $\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$.

C. $\dfrac{3}{\mathrm{e}^2}$.　　D. $\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

【答案】C

【解析】由题意可知 $T\sim B(20,0.1),np=20\times0.1=2$，

$$P\{T\leqslant1\}=P\{T=0\}+P\{T=1\}=\frac{2^0}{0!}\mathrm{e}^{-2}+\frac{2^1}{1!}\mathrm{e}^{-2}=\mathrm{e}^{-2}+2\mathrm{e}^{-2}=\frac{3}{\mathrm{e}^2}.$$

10．设总体 X 的分布函数为 $F(x)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，样本的经验分布函数为 $F_n(x)$，对于给定的 $x\left(0<F(x)<1\right)$，$D\left(F_n(x)\right)=$

A．$F(x)\left(1-F(x)\right)$　　　　B．$\left(F(x)\right)^2$

C．$\dfrac{1}{n}F(x)\left(1-F(x)\right)$　　　　D．$\dfrac{1}{n}\left(F(x)\right)^2$

【答案】C

【解析】根据经验分布函数的意义可知，$F_n(x)$ 为样本中事件 $X_i\leqslant x$ 发生的概率.

现定义随机变量

$$I_i(x)=\begin{cases}1, & X_i\le x,\\ 0, & X_i>x,\end{cases}\quad I_i(x)\sim B(1,F(x)),$$

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_i(x),\ D\left[F_n(x)\right]=D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_i(x)\right]=\frac{1}{n^2}nDI_i(x)=\frac{1}{n}F(x)[1-F(x)].$$

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 设 $g(x)$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3+x}{3-x}$ 的反函数，则曲线 $y=g(x)$ 的渐近线方程为______.

【答案】$y=\pm3$

【解析】令 $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3+x}{3-x}\Rightarrow 2y=\ln\dfrac{3+x}{3-x}\Rightarrow \mathrm{e}^{2y}=\dfrac{3+x}{3-x}\Rightarrow x=3-\dfrac{6}{\mathrm{e}^{2y}+1}$，则

$$g(x)=3-\frac{6}{\mathrm{e}^{2x}+1},\ \lim_{x\to+\infty}g(x)=3,\ \lim_{x\to-\infty}g(x)=-3.$$

故曲线 $y=g(x)$ 渐近线方程为 $y=\pm3$.

12. 设 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x=\ln2$，则 $a=$ _______ .

【答案】$a=2$

【解析】原式$=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x=\ln\frac{x}{2x+a}\Big|_1^{+\infty}=-\ln2+\ln(2+a)=\ln2\Rightarrow a=2$.

13．微分方程 $xy'-y+x^2\mathrm{e}^x=0$ 满足条件 $y(1)=-\mathrm{e}$ 的解为 $y=$______.

【答案】$y=-x\mathrm{e}^x$

【解析】$xy'-y+x^2\mathrm{e}^x=0\Rightarrow y'-\dfrac{y}{x}=-x\mathrm{e}^x$

$$\Rightarrow y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(-x\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x+C\right]=-x\left(\mathrm{e}^x+C\right)$$

代入 $y(1)=-\mathrm{e}$，得 $C=0$

故解为 $y=-x\mathrm{e}^x$.

14．已知函数 $z=z(x,y)$ 由 $z+\ln z-\int_y^x x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=$______.

【答案】$\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-2}$

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=\dfrac{\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+x\mathrm{e}^{-x^2}}{1+\frac{1}{z}}\Big|_{(1,1,1)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}\Big|_{(1,1)}=\frac{\left[2\mathrm{e}^{-x^2}+x\mathrm{e}^{-x^2}(-2x)\right]\left(1+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{z^2}\left(\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+x\mathrm{e}^{-x^2}\right)\frac{\partial z}{\partial x}}{\left(1+\frac{1}{z}\right)^2}\Big|_{(1,1,1)}=\frac{\mathrm{e}^{-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}}{4}=\frac{\mathrm{e}^{-2}}{8}.$$

15．已知 $f(x)=\begin{vmatrix}2x+1 & 3 & 2x+1 & 1\\ 2x & -3 & 4x & -2\\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1\\ 2x & -4 & 4x & -2\end{vmatrix}$，$g(x)=\begin{vmatrix}2x+1 & 1 & 2x+1 & 3\\ 5x+1 & -2 & 4x & -3\\ 0 & 1 & 2x+1 & 2\\ 2x & -2 & 4x & -4\end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=g(x)$ 的不同的根的个数为______.

【答案】2

【解析】$f(x)=\begin{vmatrix}2x+1 & 2x+1 & 1\\ 2x & 4x & -2\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$，$g(x)=x(-8x-2)=0$，

可得两个根 $x_1=\dfrac{1}{4},x_2=0$.

16．设 A,B,C 为三个随机事件，且 A 与 B 相互独立，B 与 C 相互独立，A 与 C 互不相容，已知 $P(A)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，则在事件 A,B,C 至少有一个发生的事件下，A,B,C 中恰有一个发生的概率为______.

【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析】计算对立事件发生的概率.

A、B、C 至少有一个发生的可能性为

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)=\frac{3}{4}.$$

（1）有且仅有两个事件发生的概率为

$$P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)=P(AB)+P(BC)=\frac{1}{4}.$$

（2）三个事件全发生的概率为 $P(ABC)=0$. 所以

$$P(A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\,|\,A\cup B\cup C)=1-\frac{\frac{1}{4}+0}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}.$$

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本题满分 10 分）

计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(x+1)\left(x^2-2x+2\right)}\mathrm{d}x$.

17．解：$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(x+1)\left(x^2-2x+2\right)}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{\frac{1}{5}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}}{x^2-2x+2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{5}\ln|1+x|\Big|_0^1-\frac{1}{10}\ln\left|x^2-2x+2\right|\Big|_0^1+\frac{2}{5}\arctan(x-1)\Big|_0^1=\frac{3}{10}\ln 2+\frac{1}{10}\pi.$$

18.（本题满分 12 分）

设函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf\left(x\right)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{\ln\left(1+x\right)+\ln\left(1-x\right)}=-3$.

证明：$f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'\left(0\right)$.

18．解：已知 $\ln(1+x)+\ln(1-x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)-x-\dfrac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)=-x^2+o\left(x^2\right)$,

$$\mathrm{e}^{2\sin x}=1+2\sin x+\frac{1}{2}(2\sin x)^2+o\left(x^2\right)=1+2\sin x+2\sin^2 x+o\left(x^2\right).$$

因此，$-3=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-\left[1+2\sin x+2\sin^2 x+o\left(x^2\right)\right]+1}{-x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-2\sin x}{-x^2}+\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2 x}{-x^2},$$

可以得出 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-2\sin x}{-x^2}=-5$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-2\left(x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)}{x^2}=5$,

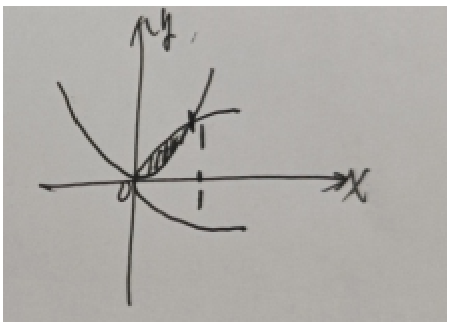
进一步可以得出 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-2x}{x^2}=5$，以及 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2}{x}=5$,

$\lim\limits_{x\to0}[f(x)-2]=0$，可得 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2=f(0)$，故 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2}{x}=5$.

19.（本题满分 12 分）

已知平面有界区域 $D=\{(x,y)\big|y^2\le x,x^2\le y\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D(x-y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

19. 解：$\iint\limits_D(x-y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left((x-y)^2+2(x-y)+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,



由轮换对称性，

$$\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D (y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

$$\iint_D (x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x-y)^2\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{3}(y-x)^3\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 f\left[(\sqrt{x}-x)^3-\left(x^2-x\right)^3\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\times\frac{1}{70}=\frac{1}{210}.$$

$$\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$

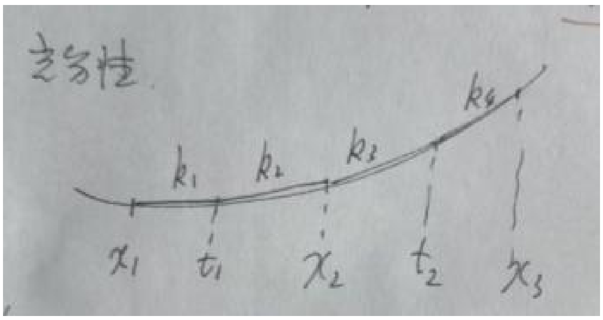
则原积分$=\dfrac{1}{210}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{71}{210}.$

20.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导. 证明导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加的充分必要条件是：对 (a,b) 内任意的 x_1,x_2,x_3，当 $x_1<x_2<x_3$ 时，

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

20. 解：充分性：如图，



任取 $x_1<t_1<x_2<t_2<x_3\in(a,b)$，

由 $k_1<k_2$，即

$$\frac{f(t_1)-f(x_1)}{t_1-x_1}<\frac{f(x_2)-f(t_1)}{x_2-t_1}.$$

令 $t_1\to x_1^+$，根据极限保号性有 $f'(x_1)\le\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$；

由 $k_3<k_4$，即 $\dfrac{f(t_2)-f(x_2)}{t_2-x_2}<\dfrac{f(x_3)-f(t_2)}{x_3-t_2}$，

令 $t_2 \to x_3^-$，根据极限保号性有 $f'(x_3) \geq \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$；

由题设可知 $f'(x_3) > f'(x_1)$.由 x_1, x_3 的任意性，可得 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调递增，充分性得证.

再证必要性：即已知 $f'(x)$ 单调递增，在 $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ 上分别使用拉格朗日中值定理，知存在 $\xi_1 \in (x_1,x_2), \xi_2 \in (x_2,x_3)$，使

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

又由 $f'(x)$ 单调递增，且 $\xi_1 < \xi_2$ 知，$f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$，即

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$，必要性得证.

综上所述，充要条件得证.

21．（本题满分 12 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩为 2.

（1）求 a 的值；

（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$，并求矩阵 $\boldsymbol{H}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{GH}$，其中 $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$.

21. 解：（1）因 $r(\boldsymbol{A}) = 2$，

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -a & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & -2a+2 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $a = 1$.

（2）由（1）可知，$\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5)$，

则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为$\boldsymbol{A}$的列向量组的一个极大线性无关组，$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_2$且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2，\ \boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2.$$

由$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{GH}$，解得$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&1&-1&1&2\end{pmatrix}$.

22.（本题满分 12 分）

投保人的损失事件发生时，保险公司的赔付额Y与投保人的损失额X的关系为

$$Y=\begin{cases}0,X\le 100,\\X-100,X>100.\end{cases}$$

设定损事件发生时，投保人的损失额X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\times 100^2}{(100+x)^3}, & x>0,\\[2ex] 0, & x\le 0.\end{cases}$$

（1）求$P\{Y>0\}$及EY.

（2）这种损失事件在一年内发生的次数记为N，保险公司在一年内就这种损失事件产生的理赔次数记为M，假设N服从参数为8的泊松分布，在$N=n\ (n\ge 1)$的条件下，M服从二项分布$B(n,p)$，其中$p=P\{Y>0\}$，求M的概率分布.

22．解：（1） $P\{Y>0\}=P\{X-100>0\}=P\{X>100\}=\int_{100}^{+\infty}\dfrac{2\times 100^2}{(100+x)^3}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$.

$$EY=\int_{100}^{+\infty}(x-100)\frac{2\times 100^2}{(100+x)^3}\mathrm{d}x=50.$$

（2）$N\sim P(8)$，$M\big|N=n\sim B\left(n,\dfrac{1}{4}\right)$

$$
\begin{aligned}
P\{M=m\} &= \sum_{n=m}^{\infty} P\{N=n\}\cdot P\{M=m|\ N=n) \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{8^n}{n!}\mathrm{e}^{-8}\cdot \mathrm{C}_n^m \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^m \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-m} \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{8^n}{n!}\mathrm{e}^{-8}\cdot \frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{1}{4}\right)^m \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-m} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^m \mathrm{e}^{-8}\frac{8^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{8^{n-m}}{(n-m)!}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-m} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^m \mathrm{e}^{-8}\frac{8^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{6^{n-m}}{(n-m)!} = \frac{2^m}{m!}\mathrm{e}^{-2},\quad m=0,1,2,\cdots,n.
\end{aligned}
$$