# 2025 考研数学（二） 真题

## 试卷及解析

**一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．**

1．设函数 $z=z(x,y)$ 由 $z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}dt=0$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

A．$\dfrac{z}{z+1}\left(e^{-x^2}-e^{-y^2}\right)$．　　B．$\dfrac{z}{z+1}\left(e^{-x^2}+e^{-y^2}\right)$．

C．$-\dfrac{z}{z+1}\left(e^{-x^2}-e^{-y^2}\right)$．　　D．$-\dfrac{z}{z+1}\left(e^{-x^2}+e^{-y^2}\right)$．

【答案】A

【解析】$z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}dt=0$，分别对 $x,y$ 求偏导，得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-e^{-x^2}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{z+1}e^{-x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+e^{-y^2}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-z}{z+1}e^{-y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{z+1}\left(e^{-x^2}-e^{-y^2}\right).$$

2．已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\sin t\,dt$， $g(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\bullet\sin^2 x$，则

A．$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点．

B．$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点．

C．$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点．

D．$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，$(0,0)$ 也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点．

【答案】B

【解析】$f'(x)=e^{x^2}\sin x, f''(x)=2xe^{x^2}\sin x+e^{x^2}\cos x$，

$f'(0)=0, f''(0)=1>0$.

$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点.

又 $g'(x)=\mathrm{e}^{x^2}\sin^2 x+\sin 2x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，

$g''(x)=\mathrm{e}^{x^2}\sin 2x+2x\mathrm{e}^{x^2}\sin^2 x+\sin 2x\mathrm{e}^{x^2}+2\cos 2x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，

$g'(0)=0, g''(0)=0$，$g''(x)$ 在 $x=0$ 的左右邻域变号，则 $(0,0)$ 是 $y=g(x)$ 的拐点.

3．如果对微分方程 $y''-2ay'+(a+2)y=0$ 任一解 $y(x)$，反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，则 $a$ 的取值范围为

A.（$-2,-1$].　　　　B.（$-\infty,-1$].

C.（$-2$，$0$）.　　　　D.（$-\infty$，$0$）.

【答案】C

【解析】当 $a=-2$ 时，$y''+4y'=0$，通解：$C_1+C_2\mathrm{e}^{-4x}$，$C_1\neq 0$ 时，$\int_0^{+\infty}\left(C_1+C_2e^{-4x}\right)\mathrm{d}x$ 不收敛. 故 B、D 排除.

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$y''+y'+\frac{3}{2}y=0$，通解：$y(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)+B\left(\sin\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)\right]$,

$\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

4. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=0$ 某去心邻域内有定义且恒不为 0，若 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x\to 0$ 时

A. $f(x)+g(x)=o(g(x))$.　　　　B. $f(x)g(x)=o\left(f^2(x)\right)$.

C. $f(x)=o\left(\mathrm{e}^{g(x)}-1\right)$.　　　　D. $f(x)=o\left(g^2(x)\right)$.

【答案】C

【解析】由题易知，$x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 高阶无穷小.

则有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ 及 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$.

又 $f(x)$， $g(x)$ 在 $x=0$ 某去心邻域内有定义且不恒等于 0.

故对于 A 选项，等式两端同除 $g(x)$ 得： $\dfrac{f(x)}{g(x)}+1=\dfrac{o[g(x)]}{g(x)}$.

取极限得 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}+1\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o[g(x)]}{g(x)}$.

即 $0+1=0$，显然 A 不成立.

对于 B 选项，等式两端同除 $f^2(x)$ 得 $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{o[f^2(x)]}{f^2(x)}$.

两端取极限得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o[f^2(x)]}{f^2(x)}$，即 $\infty=0$，显然不成立.

对于 C 选项，等式两端同除 $g(x)$ 得 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{o[e^{g(x)}-1]}{g(x)}$.

取极限得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o[e^{g(x)}-1]}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o[g(x)]}{g(x)}$.

显然有 $0=0$，故 C 正确.

对于 D 等式两端同除 $g^2(x)$ 得 $\dfrac{f(x)}{g^2(x)}=\dfrac{o[g^2(x)]}{g^2(x)}$.

取极限得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g^2(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{o[g^2(x)]}{g^2(x)}$，显然不成立. 综上选 C.

5．设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)\mathrm{d}y=$

A．$\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$．

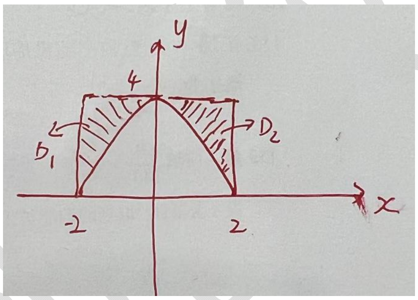
B．$\int_0^4\left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$．

C．$\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$．

D．$2\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x$．

【答案】A

【解析】由题易知，此二重积分积分区域为




$D=\left\{(x,y)\middle|4-x^2\le y\le 4,-2\le x\le 2\right\}$，对应图像为上图所示.

记 $D_1=\left\{(x,y)\middle|4-x^2\le y\le 4,-2\le x\le 0\right\}$，$D_2=\left\{(x,y)\middle|4-x^2\le y\le 4,0\le x\le 2\right\}$，且

$I=\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)\mathrm{d}y$，则 $I=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，交换积分次序得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^4\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\\&=\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

故 A 正确.

6. 设单位质点 $P,Q$ 分别位于点 $(0,0)$ 和 $(0,1)$ 处，$P$ 从点 $(0,0)$ 出发沿 $x$ 轴正向移动，记 $G$ 为引力常量，则当质点 $P$ 移动到点 $(l,0)$ 时，克服质点 $Q$ 的引力所做的功为（　　）

A. $\int_0^l \frac{G}{x^2+1}\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^l \frac{Gx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

C. $\int_0^l \frac{G}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^l \frac{G(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

【答案】B

【解析】由题可知，其对应如图所示.

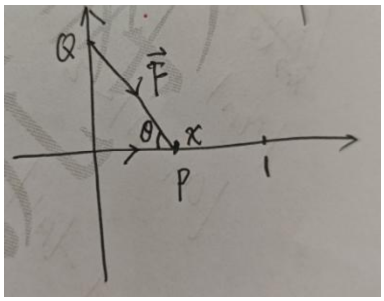
单位质点 $P$ 与单位质点 $Q$ 之间的引力为 $F = G\frac{1\cdot 1}{r^2}$，其中 $r$ 为两质点间的距离.

且由图可知 $r^2 = x^2+1$.

又引力 $F$ 在 $x$ 方向上的力投影为 $F_x = F\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}F$.

故克服引力做功为：

$$W = \int_0^l F_x \mathrm{d}x = \int_0^l \frac{G}{(x^2+1)}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{Gx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$$




7. 设函数 $f(x)$ 连续，给出下列 4 个条件：

① $\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|-f(0)}{x}$ 存在；

② $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-|f(0)|}{x}$ 存在；

③ $\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{x}$ 存在；

④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$ 存在.

其中可得到“ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导”的条件个数为

A. 1 .　　　　B. 2 .　　　　C. 3.　　　　D. 4.

【答案】D

【解析】先看③，记 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{x}=a$，由 $x\to 0^+$ 时，$a\geqslant 0$，$x\to 0^-$ 时，$a\leq 0$，有 $a=0$，且 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$ .

故由 $\left|\dfrac{|f(x)|}{x}-0\right|=\left|\dfrac{f(x)}{x}-0\right|<\varepsilon$,有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，即 $f'(0)=0$ 。

再看①，记 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-f(0)}{x}=a$，故 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0}f(x)\geqslant 0$ .

若 $f(0)=0$，则同③;

若 $f(0)>0$，则 $x\to 0$ 时，$f(x)>0$，则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=a$ .

对于②，记 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-|f(0)|}{x}=a$，则 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=|f(0)|\geq 0$ .

若 $f(0)=0$，则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$ ;

若 $f(0)>0$，亦有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=a$ .

对于④，记 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-|f(0)|}{x}=a$，则 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|\geq 0$ .

当 $f(0)=0$ 时，同③;

当 $f(0)>0$ 时，$f(x)>0\,(x\to 0)$，有 $f'(0)=a$ ;

当 $f(0)<0$ 时，$f(x)<0\,(x\to 0)$，有 $f'(0)=-a$ .

故均正确。

8. 设矩阵$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$有一个正特征值和两个负特征值，则（　　）

A.$a>4,b>0$　　　　B.$a<4,b>0$

C.$a>4,b<0$　　　　D.$a<4,b<0$

【答案】D

【解析】令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$为实对称矩阵，对应二次型为

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+ax_2^2+bx_3^2+4x_1x_2,$$

则用配方法将其化为标准型，$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1+2x_2\right)^2+(a-4)x_2^2+bx_3^2$.

已知$\boldsymbol{A}$有一正两负特征值，则$\begin{cases}a-4<0\\b<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<4\\b<0\end{cases}$，故选 D.

9. 下列矩阵中，可以经过若干初等行变换得到矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$的是

A. $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&2&1&3\\2&3&1&4\end{pmatrix}$.　　　　B. $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&2&5\\1&1&1&3\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&1&0&0\end{pmatrix}$.　　　　D. $\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&2&2&3\\2&3&4&6\end{pmatrix}$.

【答案】B

【解析】A 选项：$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&2&1&3\\2&3&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&2\\0&1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

B 选项：$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&2&5\\1&1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&2&4\\0&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

C 选项：$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

D 选项：$\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&2&2&3\\2&3&4&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

10. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{BA})+1$, 则

A. 方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

B. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 均只有零解.

C. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 没有公共非零解.

D. 方程组 $\boldsymbol{ABAx}=\boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{BABx}=\boldsymbol{0}$ 有公共非零解.

【答案】D

【解析】法一：因为 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{BA})+1\le 3$，$r(\boldsymbol{BA})\le 2$，若 $r(\boldsymbol{BA})=2\Rightarrow|\boldsymbol{BA}|=0$，

则 $r(\boldsymbol{AB})=3\Rightarrow|\boldsymbol{AB}|\ne 0$，矛盾，故 $r(\boldsymbol{BA})\le 1$，

$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{ABA}\\ \boldsymbol{BAB}\end{pmatrix}\le r(\boldsymbol{ABA})+r(\boldsymbol{BAB})\le r(\boldsymbol{BA})+r(\boldsymbol{BA})\le 2,$$

则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{ABA}\\ \boldsymbol{BAB}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，D 正确.

法二：排除法. 取 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$，则 $AB=\begin{pmatrix}3&0&-3\\3&0&-3\\3&0&3\end{pmatrix}$, $r(AB)=1$.

$BA=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $r(BA)=0$. 排除 B，C.

$A+B=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&1&0\\2&1&0\end{pmatrix}$, $r(A+B)=1$，排除 A，故选 D.

**二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.**

11. 设 $\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}dx=\ln 2$，则 $a=$ ________.

【答案】$a=2$

【解析】原式 $=\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}dx=\ln\frac{x}{2x+a}\Big|_1^{+\infty}=-\ln 2+\ln(2+a)=\ln 2\Rightarrow a=2$.

12. 曲线 $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$ 的渐近线方程为________.

【答案】$y=x-1$

【解析】可得无水平渐近线、铅直渐近线，故求斜渐近线即可.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^3-3x^2+1}{x^3}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}-x=\lim_{x\to\infty}x\cdot\left[\left(1+\frac{1-3x^2}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1-3x^2}{x^3}=-1,$$

故 $y=x-1$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[\ln\frac{1}{n}+2\ln\frac{2}{n}+\cdots+(n-1)\ln\frac{n-1}{n}\right]=$ ______ .

【答案】$-\frac{1}{4}$

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[\ln\frac{1}{n}+2\ln\frac{2}{n}+\cdots+(n-1)\ln\frac{n-1}{n}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\ln\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\ln\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\ln\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\ln\frac{n-1}{n}+\frac{n}{n}\ln\frac{n}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\ln x\mathrm{d}x^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)=-\frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}.$$

14. 已知函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\ln(1+2t),\\ 2t-\int_1^{y+t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=0\end{cases}$ 确定，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=$ ______ .

【答案】e

【解析】$\begin{cases}x=\ln(1+2t), & ①\\ 2t-\int_1^{y+t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=0, & ②\end{cases}$

由②两边关于 $t$ 求导，则 $2-\mathrm{e}^{-\left(y+t^2\right)^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2t\right)=0$.

当 $t=0$ 时，$y=1$ 且 $2-\mathrm{e}^{-1}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2\mathrm{e}$，

则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=0}=\dfrac{2\mathrm{e}}{2}=\mathrm{e}$.

15. 微分方程 $(2y-3x)\mathrm{d}x+(2x-5y)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解为______.

【答案】$y=\dfrac{2x+\sqrt{20-11x^2}}{5}$.

【解析】$(2y-3x)\mathrm{d}x+(2x-5y)\mathrm{d}y=0\Rightarrow 2y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y-3x\mathrm{d}x-5y\mathrm{d}y=0$

$\Rightarrow \mathrm{d}(2xy)-\mathrm{d}\left(\dfrac{3}{2}x^2\right)-\mathrm{d}\left(\dfrac{5}{2}y^2\right)=0$，

即 $\mathrm{d}(2xy-\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{5}{2}y^2)=0\Rightarrow 2xy-\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{5}{2}y^2=c$.

又因为 $y(1)=1$，则 $2-\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}=c,\Rightarrow c=-2$，即

$$2xy-\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}y^2=-2,$$
$$3x^2-4xy+5y^2=4.$$

则所求解为 $y=\dfrac{2x+\sqrt{20-11x^2}}{5}$.

16. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$，若 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，且 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_4$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$______.

【答案】$k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数

【解析】由于 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关；且已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则 $r(\boldsymbol{A})=3$.

那么 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价于 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_4$，故 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个特解.

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$，则 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$.由 $s=n-r\left(\boldsymbol{A}\right)=4-3=1$ 可得，$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_4$ 的通解为

$k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix}$，其中 $k$ 为任意常数.

**三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17.（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1\frac{1}{(x+1)\left(x^2-2x+2\right)}\mathrm{d}x$.

17．解：$\int_0^1\frac{1}{(x+1)\left(x^2-2x+2\right)}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{\frac{1}{5}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}}{x^2-2x+2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{5}\ln|1+x|\Big|_0^1-\frac{1}{10}\ln\left|x^2-2x+2\right|\Big|_0^1+\frac{2}{5}\arctan(x-1)\Big|_0^1=\frac{3}{10}\ln 2+\frac{1}{10}\pi.$$

18.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3.$

证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

18．解：已知 $\ln(1+x)+\ln(1-x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)-x-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)=-x^2+o(x^2)$，

$$e^{2\sin x}=1+2\sin x+\frac{1}{2}(2\sin x)^2+o(x^2)=1+2\sin x+2\sin^2 x+o(x^2).$$

因此，$-3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\left[1+2\sin x+2\sin^2 x+o(x^2)\right]+1}{-x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-2\sin x}{-x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{-x^2},$$

可以得出 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-2\sin x}{-x^2}=-5$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-2\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}{x^2}=5$，

进一步可以得出 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-2x}{x^2}=5$，以及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=5$，

$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-2]=0$，可得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2=f(0)$，故 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=5$.

19.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x,y)$ 可微,且满足 $df(x,y)=-2xe^{-y}dx+e^{-y}(x^2-y-1)dy, f(0,0)=2,$ 求 $f(x,y)$,并求 $f(x,y)$ 的极值.

19．解：$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2xe^{-y}\Rightarrow f(x,y)=-x^2e^{-y}+\varphi(y)$，则

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2e^{-y}+\varphi'(y)=e^{-y}x^2-(y+1)e^{-y},$$

$$\varphi'(y)=-(y+1)e^{-y}\Rightarrow \varphi(y)=(y+2)e^{-y}+C.$$

则 $f(x,y)=-x^2e^{-y}+(y+2)e^{-y}+C.$

又$f(0,0)=2$，$\Rightarrow C=0$，则$f(x,y)=-x^2e^{-y}+(y+2)e^{-y}$.

$$\begin{cases} f_x'=-2xe^{-y}=0, \\ f_y'=e^{-y}(x^2-y-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=-1. \end{cases}$$

则驻点（0，-1）. 又

$$f_{xx}''=-2e^{-y}, f_{xy}''=2xe^{-y}, f_{yy}''=e^{-y}(x^2-y-1)-e^{-y}=e^{-y}(x^2-y),$$

在点（0，-1）处 $A=-2e, B=0, C=-e$，则 $AC-B^2>0, A<0,$

从而 $f(x,y)$在（$0,-1$）处有极大值，且极大值为 $f(0,-1)=e$.

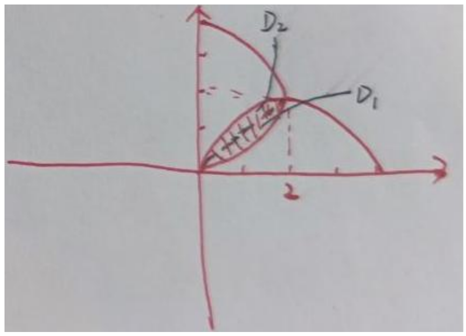
20.（本题满分 12 分）

已知平面有界区域$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4x, x^2+y^2\le 4y\right\}$，计算$\iint\limits_D (x-y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

20. 解：由题可知，积分区域

$$D=\left\{(x,y)|(x-2)^2+y^2\le 2^2, x^2+(y-2)^2\le 2^2\right\},$$

对应图形为右图所示.




显然积分区域关于 $y=x$ 对称，

记 $D_1=\left\{(x,y)|\ x^2+(y-2)^2\le 2^2, y\leqslant x\right\}$，

$D_2=\left\{(x,y)|(x-2)^2+y^2\leqslant 2^2, y\geqslant x\right\}$，

故

$$I=\iint\limits_D (x-y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} (x-y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} (x-y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} (x-y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $x=r\cos\theta.y=r\sin\theta$ 则在积分区域 $D_1$ 上有 $\begin{cases} 0\leqslant r\leqslant 4\sin\theta, \\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}, \end{cases}$

则 $\iint\limits_{D_1} (x-y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} \left(x^2+y^2-2xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta\int_0^{4\sin\theta} \left(r^2-2r^2\cos\theta\sin\theta\right)r\mathrm{d}r$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{4\sin\theta}\left(r^3-2r^3\cos\theta\sin\theta\right)\mathrm{d}r=6\pi-\frac{56}{3}.$$

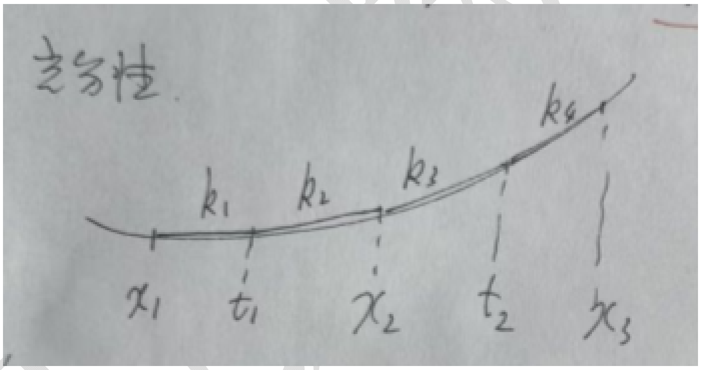
故 $I=2\left(6\pi-\frac{56}{3}\right)=12\pi-\frac{112}{3}$.

21.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内可导. 证明导函数 $f'(x)$ 在 $(a,b)$ 内严格单调增加的充分必要条件是：对 $(a,b)$ 内任意的 $x_1,x_2,x_3$，当 $x_1<x_2<x_3$ 时，

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

21. 解：充分性：




如图任取 $x_1<t_1<x_2<t_2<x_3\in(a,b)$，由 $k_1<k_2$，即 $\frac{f(t_1)-f(x_1)}{t_1-x_1}<\frac{f(x_2)-f(t_1)}{x_2-t_1}$.

令 $t_1\to x_1^{+}$，根据极限保号性有 $f'(x_1)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$；

由 $k_3<k_4$，即 $\frac{f(t_2)-f(x_2)}{t_2-x_2}<\frac{f(x_3)-f(t_2)}{x_3-t_2}$，

令 $t_2\to x_3^{-}$，根据极限保号性有 $f'(x_3)\ge\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$；

由题设可知 $f'(x_3)>f'(x_1)$. 由 $x_1,x_3$ 的任意性，可得 $f'(x)$ 在 $(a,b)$ 内严格单调递增，充分性得证.

再证必要性：即已知 $f'(x)$ 单调递增，在 $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ 上分别使用拉格朗日中值定理，知存在 $\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$，使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},\quad f'(\xi_2)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

又由 $f'(x)$ 单调递增，且 $\xi_1<\xi_2$ 知，$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，即

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$，必要性得证.

综上所述，充要条件得证.

22.（本题满分 12 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&1&1\\-2&1&a\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}k&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 合同.

（1）求 $a$ 的值及 $k$ 的取值范围;

（2）若存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$, 求 $k$ 及 $\boldsymbol{Q}$.

22. 解：（1）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同知，二者有相同的正负惯性指数. 显然，$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $k,6,0$, 故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $0$. 故 $|\boldsymbol{A}|=0$.

计算得 $|\boldsymbol{A}|=-3(a-4)$，即有 $a=4$. 此时 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-3)(\lambda-6)$，知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $3,6,0$, 即 $p=2$. 故 $k>0$.

（2）由 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$，知 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$.

故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，特征值相同，故 $k=3$.

对 $\boldsymbol{A}:\lambda=3$ 时，解 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ,得 $\boldsymbol{c}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=6$ 时，解 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，得 $\boldsymbol{c}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，

当 $\lambda=0$ 时，解 $(0\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 得 $\boldsymbol{c}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

再单位化得：$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.