# 2025 考研数学（一） 真题

## 试卷及解析

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\sin t\,dt$， $g(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\bullet\sin^2 x$，则

A． $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点．

B． $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点．

C． $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点．

D． $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，$(0,0)$ 也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点．

【答案】B

【解析】 $f'(x)=e^{x^2}\sin x, f''(x)=2xe^{x^2}\sin x+e^{x^2}\cos x$，

$f'(0)=0, f''(0)=1>0$．

$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点．

又 $g'(x)=e^{x^2}\sin^2 x+\sin 2x\int_0^x e^{t^2}dt$，

$$g''(x)=2e^{x^2}\sin 2x+2xe^{x^2}\sin^2 x+2\cos 2x\int_0^x e^{t^2}dt,$$

$g'(0)=0, g''(0)=0$， $g''(x)$ 在 $x=0$ 的左右邻域变号，则 $(0,0)$ 是 $y=g(x)$ 的拐点．

2．已知级数：① $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}$；② $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$，则

A．①与②均条件收敛．

B．①条件收敛，②绝对收敛．

C．①绝对收敛，②条件收敛．

D．①与②均绝对收敛．

【答案】B

【解析】 $\left|\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}\right|=\left|\sin\left(\frac{n^3\pi}{n^2+1}-n\pi\right)\right|=\left|\sin\frac{n}{n^2+1}\pi\right|\sim\frac{n}{n^2+1}\pi\sim\frac{1}{n}\pi\ (n\to\infty)$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散， 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}$ 不是绝对收敛.

$\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}=(-1)^n\sin\left(\frac{n^3\pi}{n^2+1}-n\pi\right)=(-1)^{n+1}\sin\frac{n}{n^2+1}\pi$ 为交错级数.

$\sin\frac{n}{n^2+1}\pi$ 递减，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}$ 是条件收敛.

又因为 $\left|(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right|\sim\frac{1}{3}\frac{1}{n^2}$，（$n\to\infty$）

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ 绝对收敛.

3．设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导，则

A．当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在.

B．当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

C．当 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

D．当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 存在.

【答案】D

【解析】A 错误，反例：

$$f(x)=\frac{\sin x^2}{x+1},\text{但 } f'(x)=\frac{2x(x+1)\cos x^2-\sin x^2}{(x+1)^2},\text{极限不存在.}$$

B 错误，反例：$f(x)=\sqrt{x+1}, f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, 极限存在，但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 极限不存在.

C 错误，反例: $f(x)=\cos x$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ 存在，但

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\cos x \text{ 不存在.}$$

D 正确，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{1}=A$，故选 D.

4．设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{4-x^2}^{4} f(x,y)\mathrm{d}y=$

A．$\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$ .

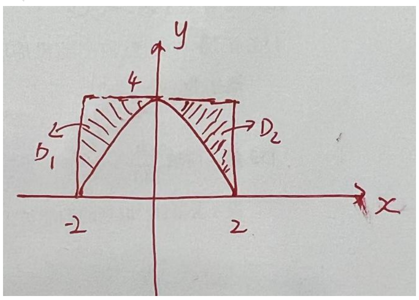
B．$\int_0^4\left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$ .

C．$\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{2}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$ .

D．$2\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x$ .

【答案】A

【解析】由题易知，此二重积分积分区域为




$D=\left\{(x,y)\middle| 4-x^2\le y\le 4,-2\le x\le 2\right\}$，对应图像为上图所示.

记 $D_1=\left\{(x,y)\middle|4-x^2\le y\le 4,-2\le x\le 0\right\}$，$D_2=\left\{(x,y)\middle|4-x^2\le y\le 4,0\le x\le 2\right\}$，且

$I=\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{4-x^2}^{4}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y$，则 $I=\iint\limits_{D_1}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma$，交换积分次序得

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^4\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x+\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

故 A 正确.

5．二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 的正惯性指数

A．0.　　　　B．1.

C．2.　　　　D．3.

【答案】B

【解析】$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda-2\right)\left(\lambda+1\right)=0$,

解得 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$, 故正惯性指数为 1，选 B.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $n$ 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$.

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，关于 $x,y,z$ 的方程组 $x\boldsymbol{\alpha}_1+y\boldsymbol{\alpha}_2+z\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4$ 的几何图形是

A．过原点的一个平面.　　　　B．过原点的一条直线.

C．不过原点的一个平面.　　　　D．不过原点的一条直线.

【答案】D

【解析】记 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，可得 $r\left(\boldsymbol{A}\right)=2$ .记 $\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha}_4\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)$，再由 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，则 $r\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)=2$. 于是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_4$ 有无穷多解，若过原点，则 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关矛盾，故不过原点.

由上述分析可知 $r\left(\boldsymbol{A}\right)=r\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)=2$，

$$x\boldsymbol{\alpha}_1+y\boldsymbol{\alpha}_2+z\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4\Leftrightarrow\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=a_{14}\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=a_{24}\end{cases}$$，故两平面交于一条直线，且不过原点. 故选 D.

7. 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{ABC})+2n$，给出下列四个结论：

①$r(\boldsymbol{ABC})+n=r(\boldsymbol{AB})+r(\boldsymbol{C})$;

②$r(\boldsymbol{AB})+n=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$;

③$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})=n$;

④$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{BC})=n.$

其中正确结论的序号是

A. ①②.　　　　B. ①③.

C. ②④.　　　　D. ③④.

【答案】A

【解析】法一：$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{ABC})+2n\ge r(\boldsymbol{AB})+r(\boldsymbol{C})-n+2n$

$$\ge r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n+r(\boldsymbol{C})-n+2n,$$

故 $r(\boldsymbol{ABC})+2n=r(\boldsymbol{AB})+r(\boldsymbol{C})+n\Rightarrow r(\boldsymbol{ABC})+n=r(\boldsymbol{AB})+r(\boldsymbol{C})$，

则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{AB})+r(\boldsymbol{C})+n\Rightarrow r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{AB})+n$，则①②正确.

法二：排除法. 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$，满足

$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{ABC})+2n$，则 $r(\boldsymbol{A})=1,r(\boldsymbol{B})=1,r(\boldsymbol{C})=2$，排除③④，故选 A.

8. 设二维随机变量 $(X,Y)$ 服从正态分布 $N(0,0;1,1;\rho)$，其中 $\rho\in(-1,1)$. 若 $a,b$ 为满足 $a^2+b^2=1$ 的任意实数，则 $D(aX+bY)$ 的最大值为

A. 1.　　　　B. 2.

C. $1+|\rho|$.　　　　D. $1+\rho^2$.

【答案】C

【解析】法一：

$$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2\operatorname{Cov}(aX,bY)=a^2+b^2+2ab\rho=1+2ab\rho,$$

又$|ab\rho|\le\left|\dfrac{a^2+b^2}{2}\rho\right|=\left|\dfrac{\rho}{2}\right|$，$D(aX+bY)=1+2ab\rho\le1+|\rho|$，故选 C.

法二：$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2ab\rho\cdot1\cdot1$

$$=a^2+b^2+2ab\rho=1+2ab\rho=1+2a\sqrt{1-a^2}\rho=f(a),$$

$$f'(a)=\rho\left(2\sqrt{1-a^2}+2a\cdot\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}\right)=2\rho\left(\sqrt{1-a^2}-\frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}}\right)=0,$$

即$2\rho\cdot\dfrac{1-a^2-a^2}{\sqrt{1-a^2}}=0$，$2a^2=1\Rightarrow a^2=\dfrac{1}{2},b^2=\dfrac{1}{2}$，于是$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

所以最大值为$1+|\rho|$，故选 C.

9．设$X_1,X_2,\cdots,X_{20}$是来自总体$B(1,0.1)$的简单随机样本.令$T=\sum\limits_{i=1}^{20}X_i$，利用泊松分布近似表示二项分布的方法可得$P\{T\le1\}\approx$

A．$\dfrac{1}{e^2}$.　　B．$\dfrac{2}{e^2}$.

C．$\dfrac{3}{e^2}$.　　D．$\dfrac{4}{e^2}$.

【答案】C

【解析】由题意可知$T\sim B(20,0.1),np=20\times0.1=2$，

$$P\{T\leqslant1\}=P\{T=0\}+P\{T=1\}=\frac{2^0}{0!}e^{-2}+\frac{2^1}{1!}e^{-2}=e^{-2}+2e^{-2}=\frac{3}{e^2}.$$

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,2)$ 的简单随机样本.记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$z_\alpha$ 表示标准正态分布的上侧 $\alpha$ 分位数.假设检验问题：$H_0$：$\mu\leqslant 1$，$H_1$：$\mu>1$ 的显著性水平为 $\alpha$ 的检验的拒绝域为

A. $\left\{(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)\middle|\overline{X}>1+\frac{2}{n}z_\alpha\right\}$.

B. $\left\{(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)\middle|\overline{X}>1+\frac{\sqrt{2}}{n}z_\alpha\right\}$.

C. $\left\{(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)\middle|\overline{X}>1+\frac{2}{\sqrt{n}}z_\alpha\right\}$.

D. $\left\{(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)\middle|\overline{X}>1+\sqrt{\frac{2}{n}}z_\alpha\right\}$.

【答案】D

【解析】$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>z_\alpha\Rightarrow\overline{X}>\sqrt{\frac{2}{n}}z_\alpha+1$，故选 D.

**二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.**

11. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^x-1}{\ln x\cdot\ln(1-x)}=$______.

【答案】$-1$

【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{-x\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{-x\ln x}=-1$.

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<\frac{1}{2},\\ x^2, & \frac{1}{2}\le x\le1\end{cases}$ 的傅里叶级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$, $S(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 的和函数，则 $S\left(-\frac{7}{2}\right)=$______.

【答案】$\dfrac{1}{8}$

【解析】$S\left(-\dfrac{7}{2}\right)=S\left(-\dfrac{7}{2}+4\right)=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}$.

13．已知函数$u(x,y,z)=xy^2z^3$，向量$\boldsymbol{n}=(2,2,-1)$，则$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,1,1)}=$______.

【答案】1

【解析】由题易知，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3,\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3,\dfrac{\partial u}{\partial z}=3xy^2z^2$，

则在$x=1,y=1$，$z=1$处有$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)=(1,2,3)$.

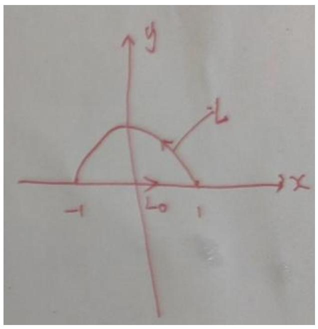
对于向量$\boldsymbol{n}=(2,2,-1)$,，归一化可得$\vec{n}_0=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$.

故$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,1,1)}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\vec{n}_0=(1,2,3)\cdot\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)=1\cdot\dfrac{2}{3}+2\cdot\dfrac{2}{3}+3\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=1$.

14．已知有向曲线$L$是沿抛物线$y=1-x^2$从点$(1,0)$到点$(-1,0)$的一段，则曲线积分

$\int_L(y+\cos x)\mathrm{d}x+(2x+\cos y)\mathrm{d}y=$______.

【答案】$\dfrac{4}{3}-2\sin 1$




【解析】由题易知可作曲线如右图所示.

记$L_0$是从$x=-1$到$x=1$的直线，并记曲线积分

$$I=\int_L(y+\cos x)\mathrm{d}x+(2x+\cos y)\mathrm{d}y,$$

则在$L_0$与$L$所围的封闭区域可用格林公式，即

$$I_1=\oint\limits_{L_0+L}(y+\cos x)\mathrm{d}x+(2x+\cos y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D(2-1)\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{1-x^2}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

又 $I_2=\int_{L_0}(y+\cos x)\mathrm{d}x+(2x+\cos y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\cos x\mathrm{d}x=2\sin 1$，故 $I=\dfrac{4}{3}-2\sin 1$.

15．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&-3\\a&3&-4\\b&5&-7\end{pmatrix}$,若方程组 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 不同解，则 $a-b=$______.

【答案】$-4$

【解析】由题知，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&-3\\a&3&-4\\b&5&-7\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解，则三秩相同，即

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^2)=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}^2\end{pmatrix}.$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，三秩显然相同，则 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解，于是要想 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 不同解，即 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，于是 $|\boldsymbol{A}|=0$. 根据行列式的倍加性质易得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}4&2&-3\\a&3&-4\\b&5&-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&2&-1\\a&3&-1\\b&5&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&0&-1\\a&1&-1\\b&1&-2\end{vmatrix}=4(-2+1)-(a-b)\ ,$$

令 $|\boldsymbol{A}|=0$，有 $a-b=-4$.

16．设 $A,B$ 为两个随机事件，且 $A$ 与 $B$ 相互独立，已知 $P(A)=2P(B),P(A\cup B)=\dfrac{5}{8}$,则在事件 $A,B$ 至少有一个发生的条件下，$A,B$ 中恰有一个发生的概率为______.

【答案】$\dfrac{4}{5}$

【解析】$P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-2P(A)P(B)$，

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\dfrac{5}{8}$，$\Rightarrow 3P(B)-2P^2(B)=\dfrac{5}{8}$.

$24P(B)-16P^2(B)=5,16P^2(B)-24P(B)+5=0\Rightarrow(4P(B)-1)(4P(B)-5)=0$，

$P(B)=\dfrac{1}{4},P(A)=\dfrac{1}{2}$.

$$P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-2P(A)P(B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$P=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}=\frac{4}{5}.$$

**三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

17．（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1\frac{1}{(x+1)\left(x^2-2x+2\right)}\mathrm{d}x.$

17．解：$\int_0^1\frac{1}{(x+1)\left(x^2-2x+2\right)}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{\frac{1}{5}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}}{x^2-2x+2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{5}\ln|1+x|\Big|_0^1-\frac{1}{10}\ln\left|x^2-2x+2\right|\Big|_0^1+\frac{2}{5}\arctan(x-1)\Big|_0^1=\frac{3}{10}\ln 2+\frac{1}{10}\pi.$$

18.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内具有 2 阶导数，记 $g(x,y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$, 若 $g(x,y)$ 满足

$$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1,$$

且 $g(x,x)=1,\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x,x)}=\frac{2}{x}$, 求 $f(u)$.

18. 解：令 $u=\frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial g}{\partial x}=f'(u)\frac{1}{y},\frac{\partial g}{\partial y}=f'(u)\left(-\frac{x}{y^2}\right)$,

又 $g(x,x)=f\left(\frac{x}{x}\right)=f(1)=1$，$\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x,x)}=f'(1)\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$, 故 $f'(1)=2.$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\left(f''(u)\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y}=f''(u)\frac{1}{y^2}$ ......（1）

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = f''(u)\left(-\frac{x}{y^2}\right)\frac{1}{y} + f'(u)\left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^3}f''(u) - \frac{1}{y^2}f'(u) \text{……（2）}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = f''(u)\left(-\frac{x}{y^2}\right) - \frac{x}{y^2} + f'(u)\left(\frac{2x}{y^2}\right) = \frac{x^2}{y^4}f''(u) + \frac{2x}{y^3}f'(u) \text{……（3）}$$

将（1）、（2）、（3）代入 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1$ 化简得：

$u^2 f''(u) + uf'(u) = 1$，即 $f''(u) + \frac{1}{u}f'(u) = \frac{1}{u^2}$.

令 $p = f'(u)$，则 $p' + \frac{1}{u}p = \frac{1}{u^2}$，

$$p = \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u}\left[\int \frac{1}{u^2}\mathrm{e}^{\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u}\mathrm{d}u + C\right] = \frac{1}{u}\left[\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u + C\right] = \frac{\ln u}{u} + \frac{C}{u}.$$

又 $p\big|_{u=1} = C = 2$，故 $p = \frac{\ln u}{u} + \frac{2}{u}$.

因此，$f'(u) = \frac{\ln u}{u} + \frac{2}{u}$，积分得 $f(u) = \int\left(\frac{\ln u}{u} + \frac{2}{u}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln^2 u + 2\ln u + C_1$，

又 $f(1) = C_1 = 1$，故 $f(u) = \frac{1}{2}\ln^2 u + 2\ln u + 1$.

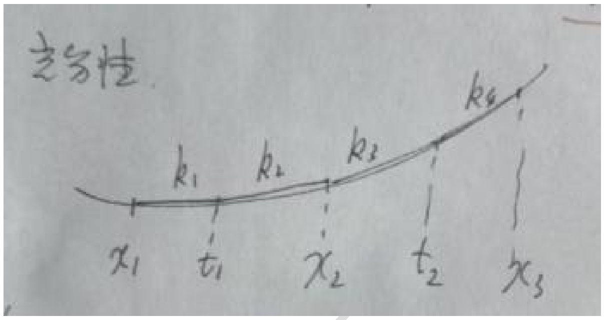
19.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内可导.证明导函数 $f'(x)$ 在 $(a,b)$ 内严格单调增加的充分必要条件是：对 $(a,b)$ 内任意的 $x_1,x_2,x_3$，当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时，

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

19. 解：充分性：如图，

任取 $x_1<t_1<x_2<t_2<x_3\in(a,b)$，




由 $k_1<k_2$，即

$$\frac{f(t_1)-f(x_1)}{t_1-x_1}<\frac{f(x_2)-f(t_1)}{x_2-t_1}.$$

令 $t_1\to x_1^{+}$，根据极限保号性有 $f'(x_1)\le\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$；

由 $k_3<k_4$，即 $\dfrac{f(t_2)-f(x_2)}{t_2-x_2}<\dfrac{f(x_3)-f(t_2)}{x_3-t_2}$，

令 $t_2\to x_3^{-}$，根据极限保号性有 $f'(x_3)\ge\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$；

由题设可知 $f'(x_3)>f'(x_1)$. 由 $x_1,x_3$ 的任意性，可得 $f'(x)$ 在 $(a,b)$ 内严格单调递增，充分性得证.

再证必要性：即已知 $f'(x)$ 单调递增，在 $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ 上分别使用拉格朗日中值定理，知存在 $\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$，使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},\quad f'(\xi_2)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

又由 $f'(x)$ 单调递增，且 $\xi_1<\xi_2$ 知，$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，即

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$，必要性得证.

综上所述，充要条件得证.

20.（本题满分 12 分）

设 $\Sigma$ 是由直线 $\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases}$ 绕直线 $\begin{cases} x=t, \\ y=t, (t\text{为参数}) \\ z=t \end{cases}$ 旋转一周得到的曲面，$\Sigma_1$ 是 $\Sigma$ 介于平面 $x+y+z=0$ 与平面 $x+y+z=1$ 之间部分的外侧，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

20. 解：直线 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ (记为 $\overrightarrow{\tau_1}$)绕直线 $x=y=z$ (记为 $\vec{\tau}$ )旋转一周所满足的条件为：

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{PO}\right|=\left|\overrightarrow{MO}\right|, \\ PM \perp \vec{\tau}. \end{cases}$$

其中点 $P\left(0,0,z_1\right)$ 是直线 $\overrightarrow{\tau_1}$ 上一点，点 $M\left(x,y,z\right)$ 是曲面 $\Sigma$ 上一点，且 $\Sigma$ 是圆锥曲面.

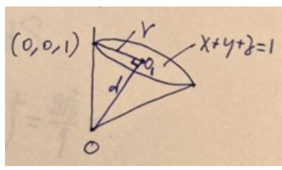
根据条件可得方程组为：

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=z_1^2, \\ x+y+z-z_1=0, \end{cases}$$

也即 $x^2+y^2+z^2=\left(x+y+z\right)^2$，于是有曲面 $\Sigma: xy+yz+xz=0$.

当 $x+y+z=1$ 与 $\Sigma$ 相交时，有 $z_1=1$. 又原点 $O$ 到平面 $x+y+z=1$ 的距离为 $d$，且

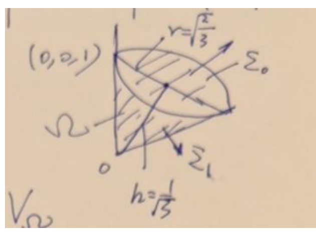
$$d=\frac{\left|0+0+0-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}.$$




又平面 $x+y+z=1$ 与圆锥曲面 $\Sigma$ 的交线为一个半径为 $r$ 的圆形区域，且

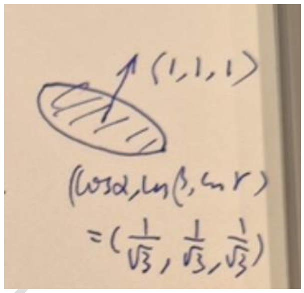
$$r=\sqrt{1-d^2}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

故题干所求 $\Sigma_1$ 为如右图所示的圆锥面外侧.




命 $\Sigma_0$ 为 $x+y+z=1$ 被 $\Sigma_1$ 所截平面（如右图所示），且该平面方向向上，

则 $\oiint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_0} = \iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\mathrm{d}V = 3V_{\Omega} = 3\cdot\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$.




而 $\iint\limits_{\Sigma_0} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$= \iint\limits_{\Sigma_0}\left[x\cos\alpha+(y+1)\cos\beta+(z+2)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma_0}(x+y+1+z+2)\mathrm{d}S = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma_0}4\mathrm{d}S = \frac{4}{\sqrt{3}}\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$,

故 $I = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi - \frac{8\sqrt{3}}{9}\pi = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$.

21.（本题满分 12 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$，已知 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的重根.

（1）求 $a$ 的值；

（2）求所有满足 $\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}$ 的非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ , $\boldsymbol{\beta}$ .

21. 解：（1） $f(\lambda) = |\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = (1-\lambda)[(\lambda-a)(\lambda+1)+4]$

可得 $(1-a)(1+1)+4=0,\ a=3$.

（2）由（1）可知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 中 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，

$$\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \Rightarrow 2\boldsymbol{A\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta} \Rightarrow 2\boldsymbol{A\alpha}-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}.$$

其中 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2 = \boldsymbol{O}$，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 为任意的非零向量，$\boldsymbol{\alpha} = (a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$，$a_1,a_2,a_3$ 不全为零.

则 $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_3-a_1-a_2 \\ 2a_3-a_1-a_2 \\ 2a_3-a_1-a_2 \end{pmatrix}$，其中 $a_1+a_2 \neq 2a_3$.

综上$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2a_3-a_1-a_2\\2a_3-a_1-a_2\\2a_3-a_1-a_2\end{pmatrix}$且$\left(a_1,a_2,a_3\text{不全为零},a_1+a_2\neq 2a_3\right)$.

22.（本题满分 12 分）

投保人的损失事件发生时，保险公司的赔付额$Y$与投保人的损失额$X$的关系为

$$Y=\begin{cases}0, X\leq 100,\\ X-100, X>100.\end{cases}$$

设定损事件发生时，投保人的损失额$X$的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\times 100^2}{(100+x)^3}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

（1）求$P\{Y>0\}$及$EY$.

（2）这种损失事件在一年内发生的次数记为$N$，保险公司在一年内就这种损失事件产生的理赔次数记为$M$，假设$N$服从参数为8的泊松分布，在$N=n\ (n\geq 1)$的条件下，$M$服从二项分布$B(n,p)$，其中$p=P\{Y>0\}$，求$M$的概率分布.

22．解：（1） $P\{Y>0\}=P\{X-100>0\}=P\{X>100\}=\int_{100}^{+\infty}\dfrac{2\times 100^2}{(100+x)^3}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$.

$$EY=\int_{100}^{+\infty}(x-100)\frac{2\times 100^2}{(100+x)^3}\mathrm{d}x=50.$$

（2） $N\sim P(8)$， $M\big|N=n\sim B\left(n,\dfrac{1}{4}\right)$

$$P\{M=m\}=\sum_{n=m}^{\infty}P\{N=n\}\cdot P\{M=m|\ N=n)$$
$$=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{8^n}{n!}\mathrm{e}^{-8}\cdot \mathrm{C}_n^m\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^m\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{8^n}{n!}e^{-8}\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{1}{4}\right)^m\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^m e^{-8}\frac{8^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{8^{n-m}}{(n-m)!}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^m e^{-8}\frac{8^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{6^{n-m}}{(n-m)!}=\frac{2^m}{m!}e^{-2}，\quad m=0,1,2,\cdots,n .$$